CORRECTION DU DS1 FAIT LE 22/09/23

EXERCICE 3 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(3x) - 3\sin(x)$.

① $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin(3(x+2\pi)) - 3\sin(x+2\pi) \underset{\text{sin est } 2\pi\text{-périodique}}{=} \sin(3x+6\pi) - 3\sin(x) \underset{\text{sin est } 2\pi\text{-périodique}}{=} \sin(3x) - 3\sin(x)$

$f(x+2\pi) = f(x)$

donc f est 2π-périodique.

② $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sin(3(-x)) - 3\sin(-x) \underset{\text{sin est impaire sur } \mathbb{R}}{=} \sin(-3x) + 3\sin x \underset{\text{sin est impaire sur } \mathbb{R}}{=} -\sin(3x) + 3\sin x$

$= -f(x)$.

donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

③ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = \sin(3(\pi - x)) - 3\sin(\pi - x) = \sin(3\pi - 3x) - 3\sin x \overset{\text{sin est } 2\pi\text{-périodique}}{=} \sin(\pi - 3x) - 3\sin x$

$= \sin(3x) - 3\sin(x)$

$= f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = f(x)$.

④ On fait d'abord une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour obtenir la courbe de f sur $[0, \pi]$. Ensuite on fait une symétrie par rapport à O et enfin on translate la courbe obtenue sur $[-\pi, \pi]$ par les translations de vecteurs $k2\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

⑤ En tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

- $x \longmapsto -3\sin(x)$
- et $x \longmapsto \sin(3x)$, composée des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto \sin x$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3.\cos(3x) - 3\cos x = 3(\cos 3x - \cos x)$.

$= 3\left(-2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)\right)$

$f'(x) = -6\sin 2x \sin x$

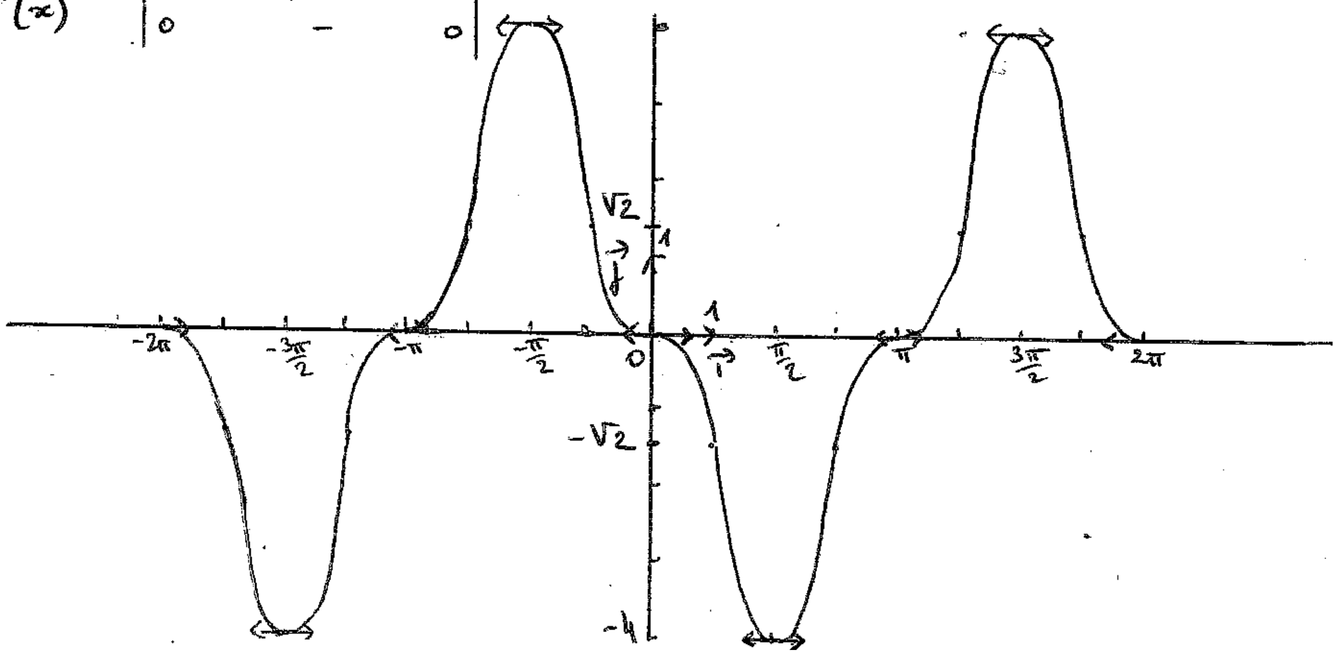
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ avec $p = 3x$ et $q = x$.

⑥

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$+$	1
$\sin 2x$	0	$+$	0
$6\sin x \sin 2x$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	$-$	0

On déduit du tableau de signe ci-contre que f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

⑦



EXERCICE 1 :

1. $A = \dfrac{1\times 2\times \cdots \times p(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{1\times 2\times\cdots\times p} = \dfrac{(p+n)!}{p!}$

$B = (2\times 1)\times(2\times 2)\times\cdots\times(2\times p) = 2^p \times 1\times 2\times\cdots\times p = 2^p\times p!$

$C = \dfrac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times\cdots\times(2p)\times(2p+1)}{2\times 4\times 6\times 8\times\cdots\times(2p)} = \dfrac{(2p+1)!}{2^p\times p!}$

2. a) $\sum_{k=1}^{n}(7^k+4k-n+2) = \sum_{k=1}^{n}7^k + 4\sum_{k=1}^{n}k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n}1$ par linéarité

$= \dfrac{7^1-7^{n+1}}{1-7} + 4\dfrac{n(n+1)}{2} + (-n+2)\times n$

$= \dfrac{7-7^{n+1}}{-6} + 2n(n+1) + n(-n+2)$

$= \dfrac{7}{-6}(1-7^n) + n(2n+2-n+2) = \boxed{\dfrac{7}{-6}(1-7^n)+n(n+4)}$

b) $\sum_{1\le i<j\le n} i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} i}_{\text{terme constant}}\Big) = \sum_{i=1}^{n} i\,(n-(i+1)+1) = \sum_{i=1}^{n} i(n-i)$

par linéarité $= n\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 = n\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n(n+1)}{2}\Big(n-\dfrac{2n+1}{3}\Big)$

$= \dfrac{n(n+1)}{2}\Big(\dfrac{3n}{3}-\dfrac{2n+1}{3}\Big) = \dfrac{n(n+1)}{2}\Big(\dfrac{3n-2n-1}{3}\Big) = \boxed{\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}}$

Exercice 2

① $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$

② Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq p$

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$ on reconnaît une somme telescopique

$$= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad \text{car } \binom{p}{p+1} = 0 \quad (p+1 > p).$$

③ $$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{1+1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n+1-2)!} = \frac{(n+1)!}{2 \times (n-1)!} = \boxed{\frac{(n+1)n}{2}}$$

q② avec $p=1$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{2+1} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!\,(n+1-3)!} = \frac{(n+1)!}{6\,(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

q② avec $p=2$

or $\binom{k}{2} = \frac{k!}{2!\,(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}$

donc $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$ par linéarité

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n} k$

$$= 2\,\frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left[\frac{n-1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= n(n+1)\left[\frac{2n-2+3}{6}\right] = n(n+1)\,\frac{2n+1}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 4 :

① Soit $x \neq 0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ donc $-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

or $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ par le théorème des gendarmes.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ et g est dérivable en 0 (et $g'(0)=0$)

② D'après le cours, une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$. or $g'(0)=0$ et $g(0)=0$

Donc une équation est : $y=0$.

③ On sait déjà que g est dérivable en 0 et que $g'(0)=0$.
Par ailleurs g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables.

Posons pour $x \in \mathbb{R}^*$ $u(x) = \sin\frac{1}{x}$ et $v(x) = x^2$

$u_1(x) = \sin x$ et $u_2(x) = \frac{1}{x}$

on a : $u(x) = u_1 \circ u_2(x)$ et $u'(x) = u_2'(x) \times u_1' \circ u_2(x)$

$u'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

puisque $u_1'(x) = \cos x$ et $u_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Ainsi $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times x^2 + \sin\frac{1}{x} \times 2x$

$g'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\frac{1}{x}$.

Conclusion : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g'(0)=0$.