

Chapitre 3 : Nombres complexes et trigonométrie

Introduction

Introduction au XVIème siècle par Bombelli (Bologne). Systématisation du calcul sur les nombres complexes pour l'étude des équations $x^3 = mx + n$ suite aux travaux de Cardan et Tartaglia. Bombelli utilise la terminologie de nombres imaginaires, c'est Gauss qui introduit la terminologie de nombres complexes.

1 Forme algébrique des nombres complexes

1.1 Définition

Théorème 1.

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul.
- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ (a et b réels).

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

Si $z = a + ib$ (a et b réels), a est la partie réelle de z , notée $Re(z)$ et b est la partie imaginaire de z , notée $Im(z)$.

Si $b = Im(z) = 0$, z est dit réel (on retrouve ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Si $a = Re(z) = 0$, z est dit imaginaire pur.

Remarque 1. — Si deux complexes sont égaux alors ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

— En particulier, si $z = a + ib = 0$ alors $a = b = 0$.

1.2 Opérations

Propriété 1 (Définition des lois $+$ (addition) et $\times$ (multiplication interne) sur $\mathbb{C}$).

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Le théorème 1 permet de calculer $(a + ib) + (a' + ib')$ et $(a + ib)(a' + ib')$ en appliquant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$. Il vient :

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et, compte tenu de $i^2 = -1$,

$z \times z' = zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

On en déduit (poser $z' = -1$) que $-z = -a - ib$ puis $z - z' = z + (-z') = (a - a') + i(b - b')$.

Théorème 2 (Inverse).

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ (a et b réels) admet un inverse z' (c'est-à-dire un nombre complexe z' vérifiant $zz' = 1$).

On a $z' = \frac{a}{a^2 + b^2} + i(-\frac{b}{a^2 + b^2})$. z' est noté $\frac{1}{z}$.

Nous pouvons alors définir le quotient $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ (si $z' \neq 0$).

► Méthode : En pratique, pour le calcul de l'inverse et du quotient, on ne retient pas la formule mais on fait intervenir "à propos" l'égalité $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

► Exemple : Soit $z = 3 + 2i$ et $z' = 5 - 4i$. Calculer $z + z'$, $z - z'$, $z \times z'$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z'}$ et $\frac{z}{z'}$.

Remarque 2. Les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$. L'égalité $zz' = 0$ équivaut à $z = 0$ ou $z' = 0$.

Le calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, la factorisation de $a^n - b^n$, la formule du binôme restent valables lorsque x , a et b sont des nombres complexes.

Propriété 2.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$$

On dit que les applications Re et Im sont des **applications linéaires**.

Remarque 3. Cette propriété s'intéresse au comportement des applications Re et Im vis à vis de l'addition et de la multiplication par un réel (multiplication dite externe, notée $\cdot$). Quel est leur comportement vis à vis de la multiplication entre complexes (dite interne)? A-t-on, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z \times z') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z \times z') = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$?

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le complexe $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$ est appelé **conjugué** de z .
L'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ s'appelle **conjugaison** sur $\mathbb{C}$.

► Exemple : $\bar{i} = -i$, $\bar{7} = 7$, $\overline{3+5i} = 3-5i$.

Propriété 3.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les relations : $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Remarque 4. — $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$ (si $z = x + iy$, $z\bar{z} = x^2 + y^2$).

— La conjugaison est involutive dans $\mathbb{C}$ (bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ de réciproque elle-même), ce qui signifie que si f désigne la conjugaison, alors $f \circ f(z) = z$ pour tout nombre complexe z . Autrement dit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\bar{z}} = z$$

Propriété 4.

$$\begin{cases} z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{cases}$$

Le résultat qui suit rassemble les propriétés de compatibilité de la conjugaison par rapport aux opérations.

Propriété 5 (Règles de calcul).

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
2. $\overline{-z} = -\bar{z}$
3. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$
5. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$
6. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Remarque 5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$.

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.

Ces deux propriétés font de la conjugaison sur $\mathbb{C}$ une application linéaire.

► Exemple : si $z = \frac{4-5i}{3+i}$, $\bar{z} = \frac{4+5i}{3-i}$. Si $Z = \frac{2z^2-i}{5z+1}$, $\bar{Z} = \frac{2\bar{z}^2+i}{5\bar{z}+1}$.

1.4 Module d'un complexe

Définition 2.

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $x + iy$. Le module de z est le réel positif noté $|z|$ et défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

► Exemple : Si $z = -3 + 4i$, $|z| = 5$. Si $z = 9i$, $|z| = 9$. Si $z = -3$, $|z| = 3$ (coïncide avec la valeur absolue pour z réel).

Propriété 6.

On a toujours :

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

$$-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

Propriété 7.

Le module $|\cdot|$ vérifie les propriétés suivantes :

$$1. |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$2. |-z| = |z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$$

3. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$|zz'| = |z||z'|$$

4. Pour tout $z' \in \mathbb{C}$ avec z' non nul, on a $|\frac{1}{z'}| = \frac{1}{|z'|}$

Propriété 8 (Corollaire).

On en déduit que pour tous nombres complexes z et z' ,

$$1. \text{ pour tout entier naturel } n, |z^n| = |z|^n,$$

$$2. \text{ pour } z' \neq 0, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|},$$

$$3. \text{ pour tout réel } \lambda, |\lambda z| = |\lambda||z|.$$

Propriété 9.

Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Alors $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (car pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\bar{z}$).

Dans le cas général le module d'une somme n'est pas égal à la somme des modules :

Théorème 3 (Inégalité triangulaire).

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|$$

De plus, $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z' = 0$ ou $z = \lambda z'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ssi les images de z et de z' sont sur une même demi-droite d'origine O .

Généralisation : par récurrence, on en déduit pour tous nombres complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$:

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Remarque 6. On a également :

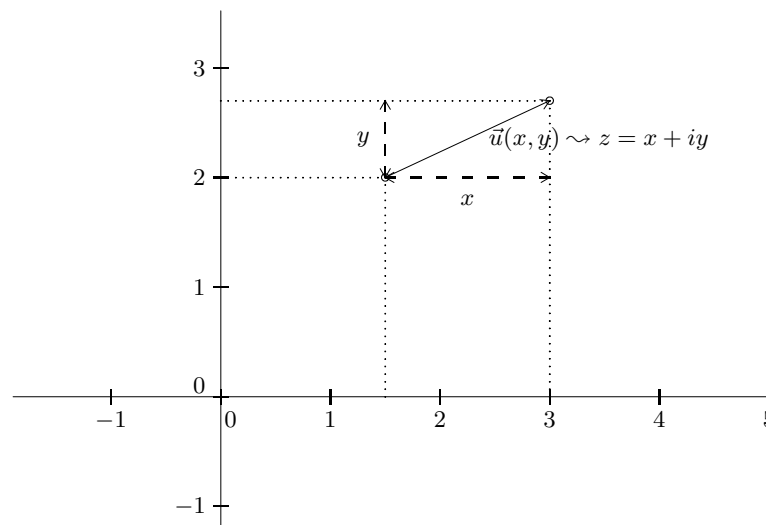
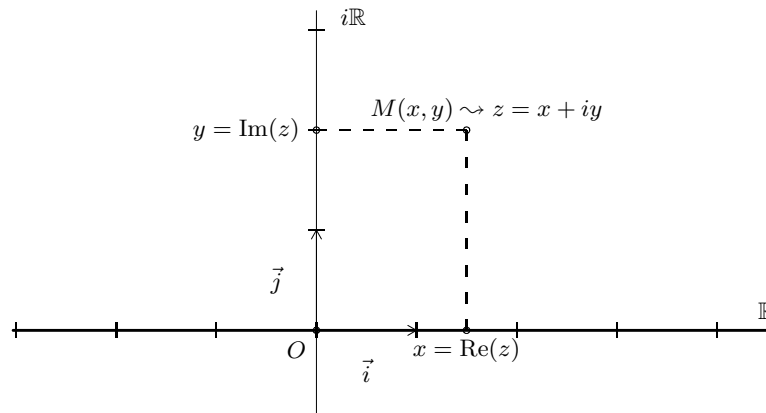
$$||z| - |z'||| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

1.5 Interprétation géométrique dans le plan complexe

On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (plan complexe).
 $z = x + iy$ (x et y réels) est représenté par le point $M(x, y)$.

On dit que M est l'image de z et que z est l'affixe du point M ou du vecteur $\vec{u}(x, y)$.

On note $M(z)$ le point d'affixe z .



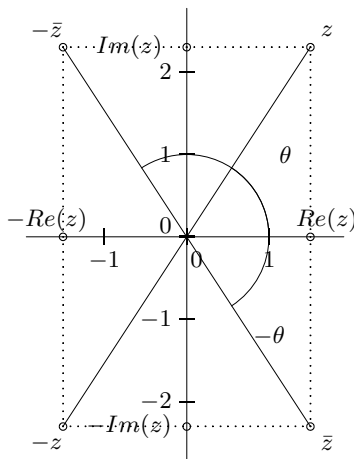
Les égalités $\text{affixe}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{affixe}(\vec{u}) + \text{affixe}(\vec{v})$ et $\text{affixe}(-\vec{u}) = -\text{affixe}(\vec{u})$ résultent des expressions de la somme et de l'opposé de deux nombres complexes.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\text{affixe}(\lambda \vec{u}) = \lambda \text{affixe}(\vec{u})$: la multiplication externe dans $\mathbb{C}$ s'interprète comme la multiplication par un scalaire des vecteurs.

Si z_A et z_B sont les affixes de A et B , $\text{affixe}(\vec{AB}) = \text{affixe}(\vec{OB} - \vec{OA}) = z_B - z_A$ (résulte de l'expression de la différence de deux nombres complexes).

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe. Deux points sont confondus si et seulement si ils ont la même affixe. On retient donc que $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$.

Interprétation géométrique du conjugué : $\bar{z}$ est le symétrique orthogonal de z par rapport à l'axe des abscisses. Autrement dit, l'application $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie orthogonale de base (Ox) .



Interprétation géométrique du module : puisqu'on est dans un repère orthonormé, d'après le théorème de Pythagore, $|a + ib|$ représente la norme (la "longueur") du vecteur $\vec{u}$ où $\vec{u}(a, b)$, ou encore la distance entre le point de coordonnées (a, b) et l'origine du repère. En outre, comme $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, on $|z_B - z_A| = AB$ et ce pour tous complexes z_A et z_B , affixes des points A et B . On retient que $|z_B - z_A| = |z_A - z_B|$ représente la distance séparant A et B dans le plan.

► Exemple : Déterminer l'ensemble E des points M dont l'affixe z vérifie $|z - 2i| = 3$.

► Exemple : Déterminer l'équation complexe du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe ω et de rayon r .

► Exemple : Soient A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points qui vérifient $|z_A - z| = |z_B - z|$.

Remarque 7. Le théorème 3 et sa remarque s'interprètent géométriquement comme suit :

$$|AB - BC| \leq AC \leq AB + BC \text{ et}$$

$$A_1 A_n \leq A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$$

2 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

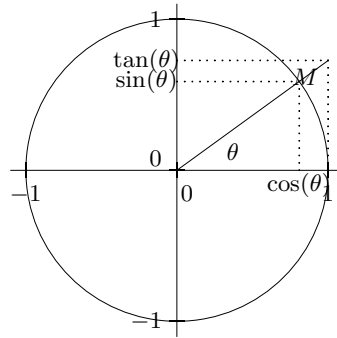
2.1 Cercle trigonométrique

Définition 3.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$

Remarque 8. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $z^{-1} = \bar{z}$ car $z\bar{z} = |z|^2 = 1$.

$\mathbb{U}$ est représenté par le cercle de centre O et de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique**.


Propriété 10 (Paramétrisation par les fonctions circulaires).

Le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1$ peut se paramétrer par : $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in]-\pi, \pi]$.

Remarque 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

2.2 Exponentielle imaginaire d'angle θ

Soit $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
Ce résultat vient de la propriété précédente.

Définition 4 (Exponentielle imaginaire d'angle θ).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ ou $\exp(i\theta)$ le complexe égal à $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Propriété 11.

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que $z = e^{i\theta}$.

Propriété 12.

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = 2k\pi$.
- Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \text{ à } 2\pi \text{ près}$

On définit l'application φ par : $\begin{cases} (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{U}, \times) \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$

Propriété 13.

On a les propriétés suivantes :

- Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, c'est-à-dire $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\theta + \theta') = \varphi(\theta) \times \varphi(\theta')$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^{-1} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

En effet, $1 = \varphi(0) = \varphi(\theta - \theta) = \varphi(\theta + (-\theta)) = \varphi(\theta) \times \varphi(-\theta)$.

Propriété 14 (Formule de Moivre).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, autrement dit $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. C'est la formule de Moivre.

Les formules d'Euler permettent d'exprimer les fonctions cosinus et sinus en fonction de l'exponentielle imaginaire d'angle θ et d'angle $-\theta$:

Propriété 15 (Formules d'Euler).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

► Exemples utilisation des formules d'Euler : technique de l'angle moitié pour la factorisation de $1 + e^{it}$, de $1 - e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

2.3 Calcul de sommes trigonométriques

► Exemple : Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

2.4 Formules trigonométriques

On peut retrouver les formules du chapitre 0 à l'aide des exponentielles complexes.

2.5 Linéarisation et calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos^p x$ et $\sin^q x$

Les formules d'Euler et de Moivre sont très utiles pour linéariser ou développer des expressions en trigonométrie, ainsi que la formule du binôme de Newton que l'on rappelle ici :

Propriété 16 (Binôme de Newton).

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.5.1 Linéarisation**Définition 5.**

Linéariser, c'est écrire une expression de la forme $\cos^p x$, $\sin^q x$ ou $\cos^p x \sin^q x$ sous forme d'une somme de termes de la forme $a \cos(nx)$ et $b \sin(nx)$, où p, q et n sont des entiers naturels.

► Exemple : Forme linéarisée de $\cos^2 x$: $\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$. La linéarisation est utile à l'obtention de primitives.

► Méthode :

1. utiliser les formules d'Euler dans un sens
2. utiliser le binôme de Newton
3. utiliser les formules d'Euler dans l'autre sens

► Exemple : Linéariser $\cos^5 x$, $\sin^5 x$, $\cos^2 x \sin^4 x$. Retrouver $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

Remarque 10. Puissance paire : que des cosinus, puissance impaire : que des sinus.

2.5.2 Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos^p x$ et $\sin^q x$

C'est l'opération inverse de la linéarisation.

► Exemple : $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$

► Méthode : $\cos(nx)$ est la partie réelle de $\cos(nx) + i \sin(nx)$ (respectivement, $\sin(nx)$ est la partie imaginaire de $\cos(nx) + i \sin(nx)$)

1. utiliser la formule de Moivre : $\cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n$
2. utiliser la formule de Newton pour développer
3. sélectionner la partie réelle (respectivement imaginaire)

► Exemple : $\cos(4x)$ est la partie réelle de $(\cos(4x) + i \sin(4x))$.

$(\cos(4x) + i \sin(4x)) = (\cos(x) + i \sin(x))^4 = (\cos x)^4 + 4i(\cos x)^3 \sin x + 6(\cos x)^2 (i \sin x)^2 + 4(\cos x)(i \sin x)^3 + (i \sin x)^4$
 $= (\cos x)^4 - 6 \cos^2 x \sin^2 x + (\sin x)^4 + i(4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x)$. Ainsi $\sin(4x) = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$ et $\cos(4x) = (\cos x)^4 - 6 \cos^2 x \sin^2 x + (\sin x)^4$.

Remarque 11. On peut exprimer $\cos(4x)$ exclusivement en fonction de $\cos x$ en utilisant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\cos(4x) = (\cos x)^4 - 6 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2$$

$$= \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 6 \cos^4 x + 1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x$$

$$= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$$

3 Pour aller plus loin ... sensibilisation à quelques propriétés algébriques de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{U}$

Propriété 17 (Structure de corps).

$\mathbb{C}$ est muni de deux lois : l'addition, notée $+$ et la multiplication interne (c'est-à-dire entre nombres complexes, notée $\times$). Examinons les propriétés de ces deux lois.

- Pour tout $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$ $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ (on dit que la loi $+$ est **associative**)
- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z + z' = z' + z$ (on dit que la loi $+$ est **commutative**)
- Il existe un unique élément z_0 de $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + z_0 = z_0 + z = z$$

z_0 est appelé **élément neutre pour** $+$. On a de plus $z_0 = 0$.

- Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, il existe un unique élément noté $-z = -a - ib$ de $\mathbb{C}$, appelé **opposé de** z , vérifiant $z + (-z) = (-z) + z = z_0$.

On dit que $\mathbb{C}$, muni de $+$, a une structure de groupe commutatif.

La loi $\times$ vérifie :

- Pour tout $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$ $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$ (on dit que la loi $\times$ est **associative**)
- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z \times z' = z' \times z$ (on dit que la loi $\times$ est **commutative**)
- Il existe un unique élément z_1 de $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \times z_1 = z_1 \times z = z$$

z_1 est appelé **élément neutre pour** $\times$. On a de plus $z_1 = 1$.

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z_0 \times z = z \times z_0 = z_0$
- Tout élément de $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$ admet un inverse.

Les lois $+$ et $\times$ vérifient :

Pour tout $(z, z', z'') \in \mathbb{C}$,

$$(z + z') \times z'' = (z \times z'') + (z' \times z'')$$

et

$$z \times (z' + z'') = (z \times z') + (z \times z'')$$

(on dit que $\times$ est **distributive par rapport à** $+$).

On dit alors que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Propriété 18 (Structure d'espace vectoriel).

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$, où $\cdot$ est la multiplication externe (ou multiplication par les réels), définie pour tout réel α et pour tout complexe $z = x + iy$ par $\alpha \cdot z = \alpha x + \alpha yi$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{C}, +) \text{ est un groupe commutatif} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \alpha(z + z') = \alpha \cdot z + \alpha \cdot z' \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot z = \alpha \cdot z + \beta \cdot z \\ (\alpha \beta) \cdot z = \alpha \cdot (\beta \cdot z) \end{cases} \\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad 1 \cdot z = z \end{array} \right.$$

Remarque 12. Si l'on considère $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel, on dit que z et z' sont des vecteurs et que α et β sont des scalaires.

Propriété 19 (Structure de $\mathbb{U}$).

- $\times$ est associative et commutative dans $\mathbb{U}$ (comme dans $\mathbb{C}$).
- $\times$ est une loi interne dans $\mathbb{U}$, c'est-à-dire que si z et z' sont dans $\mathbb{U}$, alors zz' est aussi dans $\mathbb{U}$.
- $1 \in \mathbb{U}$ donc $\mathbb{U}$ possède un neutre pour $\times$.
- Si $z \in \mathbb{U}$ et si $z \neq 0$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

Ces propriétés font de $(\mathbb{U}, \times)$ est un **groupe** commutatif.

4 Un peu d'histoire des maths

Les nombres complexes apparaissent en Italie au XVI^{ème} siècle, suite aux travaux menés par Tartaglia, Cardan et Bombelli dans le contexte de la résolution des équations du troisième degré (apparition en 1545 d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif dans l'ouvrage *Ars Magna*). La première formalisation avec règles de calcul sur ces quantités que l'on nomme "impossibles" est faite par Bombelli. Pendant les trois siècles qui vont suivre, ces nouveaux nombres auront du mal à se faire admettre. Cependant leur découverte semble lever l'obstacle des résolutions impossibles de certaines équations. La question naturelle qui se pose est alors : peut-on, à condition d'écrire des racines carrées de nombres négatifs, obtenir toujours n racines à un polynôme de degré n (théorème fondamental de l'algèbre) ? C'est dans ce contexte de recherche, qui va tenir en haleine pendant deux siècles les scientifiques, que ces quantités vont s'avérer utiles.... Descartes les cite dans ces écrits en les baptisant "nombres imaginaires" en 1637. Cet adjectif rend compte à la fois de l'utilité de ces nombres mais aussi du fait qu'on ne leur accorde aucune réalité. Au XVIII^{ème} siècle, les mathématiciens tentent de généraliser les fonctions de la variable réelle à la variable imaginaire et utilisent les quantités imaginaires dans le calcul intégral (Bernouilli, Leibniz, Nicole, Moivre, Euler, d'Alembert, Cotes). Euler normalise leur écriture et s'affranchit de la notation $\sqrt{-1}$ qu'il remplace par i .

A la fin du XVIII^{ème} siècle, les quantités imaginaires ne sont pas encore totalement acceptées par la communauté mathématique mais seulement tolérées comme outils pratiques tant en analyse qu'en algèbre. L'étape suivante consiste à établir une construction des complexes qui leur permette de trouver leur place dans le corpus mathématique. Cette construction se fait par la géométrie avec Gauss qui en 1831, dans son ouvrage *Theoria residuorum biquadraticorum*, présente le plan complexe, donne une construction effective de ces nombres, explicite les opérations et introduit la terminologie de nombres complexes (composés de deux nombres : la partie réelle et la partie imaginaire) et par l'algèbre abstraite avec Hamilton qui présente en 1833 dans son ouvrage *Theory of conjugates functions or algebraic couples* une construction algébrique sur des couples de réels. En 1847 dans son ouvrage *Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires et sur les racines symboliques des équations et des équivalences*, Cauchy publie son travail sur les restes des polynômes dans la division par le polynôme $X^2 + 1$ et reconstitue toutes les opérations connues sur les complexes à l'aide de l'algèbre des polynômes. Il est à l'origine du choix des mots "arguments" et "affixe". Au milieu du XIX^{ème} siècle, les complexes ont définitivement intégré le corpus des mathématiques. Leur interprétation géométrique permet de démontrer plus simplement de nombreuses identités trigonométriques et de nombreux problèmes de géométrie plane. Ils interviennent dans les calculs sur les intégrales elliptiques, dans les équations algébriques, la théorie de Galois, les surfaces de Riemann. Au XX^{ème} siècle, ils sont mis en oeuvre dans les fractales ou les courbes elliptiques.

L'utilité des nombres complexes en physique, que ce soit en optique (Fresnel, 1823, loi de Snell-Descartes), dans le domaine de l'électromagnétisme (Maxwell, 1860, premières équations) ou de l'électricité (Kenelly, 1893, généralisation de la loi d'Ohm au courant alternatif), est avérée dès le XIX^{ème} siècle et essentielle. Les complexes servent de représentation de phénomènes physiques et d'outil unificateur. Ils apparaissent également dans les séries de Fourier et dans la résolution des équations différentielles linéaires.

De cet exemple de naissance d'une théorie mathématique, on peut tirer quelques conclusions : il faut du temps pour qu'une nouvelle notion soit adoptée par une communauté scientifique ; des objets mathématiques très abstraits et étudiés dans un certain contexte peuvent trouver des applications dans des domaines très différents de ceux dans lesquels ils ont été créés ; et cela peut prendre beaucoup de temps (ici quatre siècles et demi séparent Cardan et Kenelly) ! De même, de nombreux sujets de recherche actuels sont étudiés pour des motifs purement mathématiques, et certains serviront sûrement dans quelques années, mais on ne peut le savoir à l'avance !