Exercice 1

1. Soient z et z' deux nombres complexes. On pose $f(z,z') = z\bar{z}' + \bar{z}z'$.
   (a) Calculer $f(i,3)$, $f(1+2i,-2+i)$, $f(e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{2i\pi}{3}})$.
   (b) Montrer que pour tout couple $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z,z')$ est réel.
   (c) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $f(z,1+i) = 2\sqrt{2}$. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.
2. Soit z un nombre complexe différent de 1. On pose $g(z) = \dfrac{z+2}{z-1}$. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $g(z) \in \mathbb{R}$

Exercice 2

On note j le nombre complexe $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Dans cet exercice on s'intéresse à certaines propriétés vérifiées par ce nombre complexe.

1. (a) Vérifier que $j^3 = 1$, que $j^2 = \bar{j}$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
   (b) Dans le plan complexe, placer les points A, B et C d'affixes respectives 1, j et j^2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Démontrer ce résultat.
   (c) Quelles sont les solutions de l'équation $|z| = |z+1| = 1$? On raisonnera géométriquement.
   (d) Soient p et q deux entiers naturels non nuls. En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer tous les complexes z tels que l'on ait à la fois $z^p = 1$ et $(z+1)^q = 1$.
2. (a) Démontrer que tout nombre comlexe $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x + jy$ avec x et y réels. Exprimer x et y en fonction de a et de b puis a et b en fonction de x et y.
   (b) Soient $z = x + jy$ et $z' = x' + jy'$ (avec x, x', y et y' réels) deux nombres complexes. Mettre sous la forme $A + jB$ (avec A et B réels) chacun des nombres complexes suivants, le dernier étant défini pour $z \neq 0$:
   $$z + z',\ zz', jz,\ j^2 z, \bar{z},\ |z|^2,\ z^{-1}.$$
3. On pose dans cette partie $E = \{x + jy,\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$. Les trois dernières questions de cette partie sont FACULTATIVES.
   (a) Donner trois éléments de E.
   (b) Montrer que la somme, la différence et le produit de deux éléments de E est un élément de E.
   (c) Montrer que pour tout élément z de E, $|z|^2$ est un entier positif ou nul.
   (d) Montrer l'équivalence $(z \in E \text{ et } |z| = 1) \Leftrightarrow (\exists z' \in E \text{ tel que } zz' = 1)$.
   (e) Soit F l'ensemble des éléments de E tels qu'il existe $z' \in E$ tel que $zz' = 1$. En utilisant la question précédente, déterminer les six éléments de F.