

UDZ Cor le 27/04/23

Exercice 1

- ① ② $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
3 ⑤ $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x = y \Rightarrow x^2 = y^2$
⑥ $x \geq 2 \Rightarrow x+2 \geq 3$
② ② f est constante égale à c
⑤ f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
1,5 ③ Si un entier est impair alors son carré est impair
③ ② réciproque : $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ fausse car $(-2)^2 = 4 \geq 1$ mais $-2 < 1$
contaposée : $x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$ vraie car $x^2 < 1$ ssi $x^2 - 1 < 0$ ssi $(x-1)(x+1) < 0$
ssi $x-1 < 0$ ou $x+1 < 0$
ssi $x < 1$ ou $x < -1$
dans les 2 cas $x < 1$
3,5 ③ ⑥ $\exists p \in \mathbb{N}, 15 \mid p$ et non $(3 \mid p \text{ et } 5 \mid p)$
 $\equiv \exists p \in \mathbb{N}, 15 \mid p$ et $(3 \nmid p \text{ ou } 5 \nmid p)$
1 ou non $(P \Rightarrow Q) \equiv P$ et non (Q) .

exercice 2

6 et 1,5 points

① Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $P(n)$: " $u_n \leq n!$ ". Mg $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie par récurrence forte.

0,5 (-) initialisation: si $n=0$ alors $u_0=1$ et $0!=1$ donc $u_0 \leq 0!$

0,5 (-) hérédité: on suppose que $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \in [0, n]$, $P(k)$ vraie
Mg $P(n+1)$ vraie c-à-d $u_{n+1} \leq (n+1)!$ c-à-d $P(0), P(1), \dots, P(n)$ vraies

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \quad \text{or } \forall k \in [0, n] \quad u_k \leq k! \text{ d'après HR,}$$

$$\text{donc } \forall k \in [0, n], \quad \binom{n}{k} u_k \leq \binom{n}{k} k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3

$$\text{ainsi } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\text{or par linéarité } \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\text{et } \forall k \in [0, n] \quad \frac{1}{(n-k)!} \leq 1 \text{ puisque } (n-k)! \geq 1$$

$$\text{ainsi } n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^n 1 = n! (n+1) = (n+1)!$$

$$\text{et donc } u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \leq (n+1)! \text{ donc } P(n+1) \text{ vraie}$$

0,5 (-) concl: $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.

② On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$

Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ et p et q premiers entre eux

Ainsi $\ln 2 \times q = \ln 3 \times p$ c-à-d $q \ln 2 = p \ln 3$, soit encore $\ln 2^q = \ln 3^p$

On prend l'exponentielle, il vient alors $\exp(\ln 2^q) = \exp(\ln 3^p)$,

soit $2^q = 3^p$ or 2^q est un nombre pair et 3^p un nombre impair

Un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair $\rightarrow$ contradiction

Donc $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$

③ Soit $n \in \mathbb{N}$. Mg $n^3 - n$ est divisible par 3 en raisonnant par disjonction de cas.

Si $n \equiv 0 [3]$ c-à-d si $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $n = 3k$ alors $n^3 - n = (3k)^3 - 3k$

$$\text{donc } n^3 - n = 3 \times 9k^3 - 3k = 3(9k^3 - k) = 3k' \text{ avec } k' = 9k^3 - k \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } 3 \mid n^3 - n$$

Si $n \equiv 1 [3]$ c-à-d s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 3k+1$ alors

$$n^3 - n = (3k+1)^3 - (3k+1) = (3k)^3 + 3(3k)^2 + 3(3k) + 1 - 3k - 1$$

$$= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 3k - 1 = 27k^3 + 27k^2 + 6k = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k)$$

$$= 3k'' \text{ avec } k'' = 9k^3 + 9k^2 + 2k \in \mathbb{N} \text{ donc } 3 \mid n^3 - n$$

Si $n \equiv 2 [3]$ c-à-d s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 3k+2$ alors

$$n^3 - n = (3k+2)^3 - (3k+2) = (3k)^3 + 3(3k)^2 \times 2 + 3(3k) \times 2^2 + 2^3 - 3k - 2$$

$$= 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 - 3k - 2 = 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6$$

$$= 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2) = 3k''' \text{ avec } k''' = 9k^3 + 18k^2 + 11k + 2$$

$$\text{donc } 3 \mid n^3 - n$$

Dans tous les cas, $n^3 - n$ est divisible par 3

un seul cas
et par disj.

1/1,5

Exercice 3



$0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc

$\cos \frac{\pi}{5} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{5} > 0$

② $\sin 4x = \sin x$ ssi $4x = x [2\pi]$ ou $4x = \pi - x [2\pi]$ / 1

$\sin 4x - \sin x$ ssi $3x = 0 [2\pi]$ ou $5x = \pi [2\pi]$ / 0,5

$= 2 \cos \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$ ssi $x = 0 [\frac{2\pi}{3}]$ ou $x = \frac{\pi}{5} [\frac{2\pi}{5}]$ / 0,5

ssi $x = \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les 8 solutions de l'équation qui appartiennent à $] -\pi, \pi]$ sont:

$-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{3\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi$ / 0,5

③ $\begin{cases} \sin 4x = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 2 \sin x \cos 2x = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 4 \sin x \cos x \cos 2x = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

ssi $4 \cos x \cos 2x = 1$ ssi $4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 1$ ssi $8 \cos^3 x - 4 \cos x - 1 = 0$

④ @ On sait que $\frac{2\pi}{3}$ est solution du système donc $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ est solution de l'équation $8x^3 - 4x - 1 = 0$.

⑤ $8(x + \frac{1}{2})(x^2 + ax + b) = 8(x^3 + ax^2 + bx + \frac{x^2}{2} + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2})$
 $= 8x^3 + (8a + 4)x^2 + (8b + 4a)x + 4b$
 $= 8x^3 - 4x - 1$

par identification on obtient $8a + 4 = 0$, $8b + 4a = -4$ et $4b = -1$

ssi $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$

⑥ $8x^3 - 4x - 1 = 0$ ssi $8(x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$ ssi $(x + \frac{1}{2})(8x^2 - 4x - 2) = 0$

Réolvons $8x^2 - 4x - 2 = 0$ ssi $x = -\frac{1}{2}$ ou $8x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 \times (-2) = 16 + 64 = 80 = (4\sqrt{5})^2$

$8x^2 - 4x - 2 = 0$ ssi $x = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{2 \times 8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

Les solutions de l'équation $8x^3 - 4x - 1 = 0$ sont: $-\frac{1}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

⑦ Parmi les trois solutions précédentes, seul $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ est positif.

Or $\frac{\pi}{5}$ est solution de $\begin{cases} \sin 4x = \sin x \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ donc $\cos \frac{\pi}{5}$ est solution de $8x^3 - 4x - 1 = 0$

et de plus $\cos \frac{\pi}{5} > 0$ On en déduit que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

On sait que $\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{5} = 1$, d'où $\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}$

et $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}}$ car on sait d'après ① que $\sin \frac{\pi}{5} > 0$

On a donc $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2} = \sqrt{1 - (\frac{1}{16} + \frac{5}{16} + \frac{2\sqrt{5}}{16})} = \sqrt{\frac{10}{16} - \frac{2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sin \frac{\pi}{5}$ MOND'S

Exercice 4

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} - \binom{n}{0} = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$$

binôme de Newton

2) a) Montrons que $i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $i \leq n$.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \leq n$.
D'une part $i \binom{n}{i} = i \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$

$$\text{D'autre part } n \binom{n-1}{i-1} = n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$$

$$\text{Donc } i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$$

2) b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} i = \sum_{i=1}^n n \binom{n-1}{i-1} = n \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1}$ changement d'indice $j = i-1$
 $= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}$ par la formule du binôme de Newton

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $j=0$
 $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{n}{i} (j+i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \binom{n}{i} (j+i)$ par linéarité
 $= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \binom{n}{i} j + \sum_{j=1}^n \binom{n}{i} i \right)$
 $= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} \sum_{j=1}^n j + \binom{n}{i} i \sum_{j=1}^n 1 \right)$
 $= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} \frac{n(n+1)}{2} + \binom{n}{i} i n \right)$ par linéarité

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} + n \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} i \\ &= \frac{n(n+1)}{2} (2^n - 1) + n n 2^{n-1} = n \left[\frac{n+1}{2} \cdot 2^n - \frac{n+1}{2} + n 2^{n-1} \right] \\ &= n \left[(n+1) 2^{n-1} - \frac{n+1}{2} + n 2^{n-1} \right] \\ &= n \left[(2n+1) 2^{n-1} - \frac{n+1}{2} \right] \end{aligned}$$

Bonne + 0,5