Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent ne pas être traités dans l'ordre. Il y a matière à valoriser votre travail dans ce devoir, soyez confiants.

Exercice 1 sur 15 points : sommes et produits trigonométriques

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Les quatre questions sont indépendantes.

1. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
   (b) Montrer que pour tout k entier compris entre 0 et $n-1$, $|e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1|^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1|^2$.
2. (a) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Montrer que $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.
3. (a) Appliquer la formule du binôme à $(e^{ix}+1)^n$, x étant réel.
   (b) Transformer $e^{ix}+1$ en utilisant la formule de l'angle moitié (ou formule de l'arc moyen).
   (c) Déduire des deux questions précédentes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.
4. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$.

Exercice 2 sur 15 points : étude de fonctions

Dans cet exercice on se place dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On s'intéresse aux fonctions $f \ : \ x \mapsto x + (\sin(x))^2$ et $g \ : \ x \mapsto x + (\sin(x))^4$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f et de g. Sont-elles paires ? impaires ?
2. Montrer que pour tout réel appartenant à l'ensemble de définition de f, $x \leq f(x) \leq x+1$. Interpréter graphiquement cet encadrement.
3. Préciser le domaine de dérivabilité de f et déterminer sa dérivée.
4. Etablir le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
5. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{3\pi}{4}$.
6. Déterminer les points d'abscisses x_0 de $[0, \pi]$ en lesquels la tangente a pour équation $y = x$ et $y = x+1$.
7. Exprimer $f(x+\pi)$ en fonction de π. En déduire que la courbe représentative de f s'obtient à partir de sa représentation graphique sur $[0, \pi]$ par translations successives de vecteur $n\pi(\vec{i}+\vec{j})$, où n est un entier relatif.
8. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, \pi]$, puis sur le domaine de définition de f. On prendra un repère orthonormé d'unité 1 cm.
9. (a) Pour tout x réel, comparer les nombres $f(x)$ et $g(x)$. En déduire les positions relatives des courbes représentatives de f et de g.
   (b) Linéariser $(\sin(x))^4$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3 sur 9 points : ensembles

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
On appelle différence symétrique de A et de B et on note $A\Delta B$ la partie de E définie par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x \in A \cup B,\ x \notin A \cap B\}$$

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ et que $B = \{2, 3, 7, 8, 9\}$. Déterminer $A\Delta B$.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta\bar{A}$.
4. Soit C un sous ensemble de E. Montrer que $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
5. Montrer que $A\Delta B = B \Leftrightarrow A = \emptyset$. On pourra pour cela utiliser que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

Exercice 4 sur 12 points : nombres réels et nombres complexes

1. Equations et inéquations
   (a) Résoudre l'inéquation $|x + 2| > 3$ d'inconnue réelle x et représenter l'ensemble des solutions sur la droite graduée.
   (b) Résoudre l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$.
2. Ensembles de nombres complexes
   (a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z^2 est imaginaire pur.
   (b) Pour tout point M du plan complexe d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = (1 + i)z - 1 + 3i$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 3$.
   (c) Déterminer l'ensemble des nombes complexes z tels que z, $1 - z$ et z^2 aient le même module.
3. Une inégalité
   Montrer que, pour tous nombres complexes z et z' on a

$$|z - z'|^2 - \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z'|^2\right) \leq 0 \qquad (*)$$

   Pour quels nombres z et z' a-t-on l'égalité dans $(*)$?