DM3 à rendre pour le lundi 6 novembre

Exercice 1 (temps indicatif 1h30)

Les deux parties sont indépendantes.
Dans tout l'exercice on note f et g les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Partie A : étude des fonctions f et g

1. Vérifier que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de f et de g.
3. Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) - g^2(x) = 1$.
4. Donner le domaine de dérivabilité de g et déterminer g'.
5. Dresser le tableau de variation de g. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de g.
6. Préciser les branches infinies. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
7. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0. On note T cette tangente.
8. Etudier la convexité de g.
9. Tracer $\mathcal{C}_g$ et T.
10. Faire de même l'étude de la fonction f en précisant l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Partie B : étude de l'application réciproque de g

1. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note g^{-1} sa réciproque.
2. Démontrer que g^{-1} est impaire. On pourra vérifier que I est symétrique par rapport à O puis poser, pour $x \in I$ fixé, $y = g^{-1}(-x)$ et montrer que $-y = g^{-1}(x)$.
3. Démontrer que g^{-1} est dérivable sur I et montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R},\ \left(g^{-1}\right)'(g(x_0)) = \dfrac{1}{f(x_0)}$ puis en déduire que pour tout $y_0 \in I,\ \left(g^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y_0^2}}$. On utilisera pour cela la deuxième partie de la question 3 de la partie A.
4. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ au point d'abscisse 0. On note T' cette tangente.
5. Construire sur le même figure $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_{g^{-1}}$, T et T'.
6. Soit $g_1\ :\ x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Montrer que g_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
7. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Exercice 2 (temps indicatif 40 min)

Soit $n \geq 1$. Dans cet exercice on s'intéresse à la somme suivante :

$$S = \sum_{k=1}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^k}\right).$$

On souhaite la calculer de deux manières différentes.

1. Méthode 1
   (a) Linéariser $\sin^3 x$.
   (b) En utilisant la question précédente, réécrire S sous la forme d'une somme télescopique et conclure.
2. Méthode 2
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_k : x \mapsto 3^k \sin^3\left(\frac{x}{3^k}\right)$.
   (a) Montrer que f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f_k'.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f_k'(x)\mathrm{d}x = 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$.
   (c) Linéariser $\sin^2 x \cos x$.
   (d) Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle S = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{x}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)\right)$.
   (e) Conclure.

Exercice 3 (temps indicatif 30 min)

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1+e^x) \text{ et } g(x) = -x$$

   (a) $f \circ g$ est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, donner son expression.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f \circ g(x) = x$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 1$$

   (a) Déterminer l'image directe de $[0, 2]$ par f.
   (b) Déterminer l'image réciproque de $[1, 4]$ par f.
3. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$$

   Cette relation est-elle une relation d'ordre ? Une relation d'équivalence ?