TD4 cor

Ex 3

(1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables
f est impaire en tant que somme de 2 fonctions impaires donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}^+$ (symétrie par rapport à O)
$f(x+2\pi) = x+2\pi - \sin(x+2\pi) = x+2\pi - \sin x = f(x)+2\pi$ pour tout x réel.
On peut donc restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$ et déduire le reste de la courbe par translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi on déduit des 2 points précédents que l'on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1-\cos x \geq 0$ On a donc le tableau

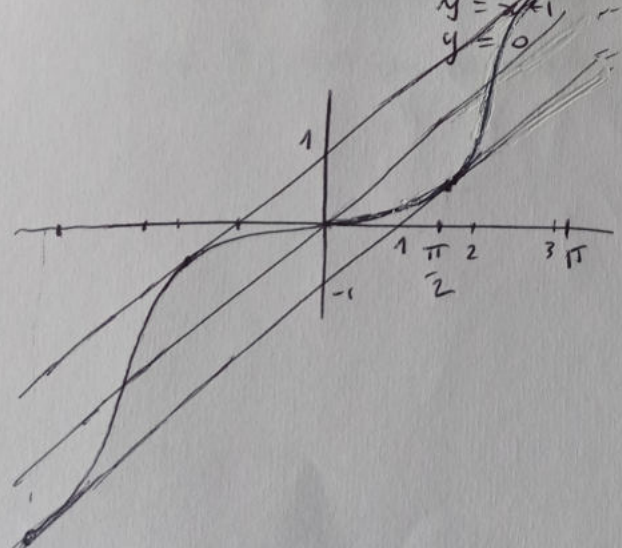
x	0	π
$f(x)$	0 ↗	π

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq -\sin x \leq 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $x-1 \leq x-\sin x \leq x+1$
$\mathcal{C}_f$ est située dans la zone comprise entre les droites d'équation $y=x-1$ et $y=x+1$

(3) Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(x)=x-1$ ssi $x-\sin x = x-1$ ssi $\sin x = 1$ ssi $x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
$f(x) = x+1$ ssi $x - \sin x = x+1$ ssi $\sin x = -1$ ssi $x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

(4) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ ~~au~~ point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est :
$y = f'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2}) = (1-\cos\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 = x-1$
Par symétrie centrale par rapport à O, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est : $y = x+1$

(5) La droite d'équation $y=x-1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$
$y = x+1$ — — — — — $-\frac{\pi}{2}$
$y = 0$ — — — — — 0



Ex 4 TD4

① Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{C}_f$. On a donc $y=f(x)$ et $x\neq 1$

$M'(2-x, 4-y)$ est le symétrique de M par rapport à $\Omega(1,2)$

En effet, $\vec{\Omega M'} = \vec{M\Omega}$ puisque $\vec{\Omega M'}(2-x-1, 4-y-2)$ et $\vec{M\Omega}(1-x, 2-y)$

De plus $M'\in\mathcal{C}_f$ puisque $f(2-x) = \frac{(2-x)^2}{2-x-1} = \frac{4-4x+x^2}{1-x}$

et $4-y = 4-f(x) = 4-\frac{x^2}{x-1} = \frac{4(x-1)-x^2}{x-1} = \frac{4x-4-x^2}{x-1} = \frac{-4x+4+x^2}{1-x}$

On en déduit que l'on peut restreindre l'étude de f à $]1,+\infty[$

Le reste de la courbe s'obtiendra par symétrie par rapport à Ω

② f est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que quotient <u>défini</u> de fonctions dérivables

$\forall x\in]1,+\infty[,\ f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

or si $x>1$, $x>0$ et $x(x-2)$ est du signe de $x-2$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Au point d'abscisse 2, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale puisque $f'(2)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

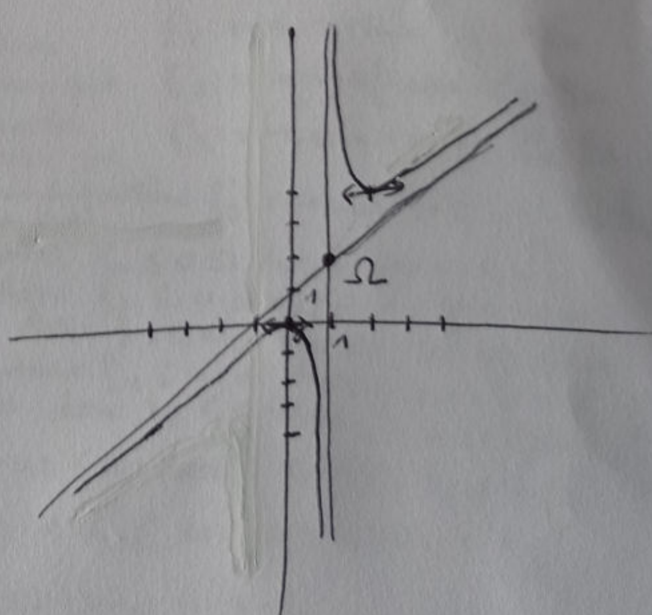
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ la droite d'équation $y=x+1$ comme asymptote et en 1^+ la droite d'équation $x=1$

De plus $f(x)-(x+1) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} > 0$ lorsque $x>1$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y=x+1$



Ex 5 TD4

① Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^4+1 \geq 1$ et $x^2+1 \geq 1$ donc f et g sont définies sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, $x^4 > x^2$ donc $1+x^4 > 1+x^2$ et $\frac{1}{1+x^4} < \frac{1}{1+x^2}$

Soit $x \in [-1,1]$, $x^4 \leq x^2$ donc $1+x^4 \leq 1+x^2$ et $\frac{1}{1+x^4} \geq \frac{1}{1+x^2}$

Ainsi $f \geq g$ sur $[-1,1]$ et $f < g$ sur $\mathbb{R} - [-1,1]$

($\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$) ($\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$)

② • Soit $x \in [\frac{1}{2}, 3]$. On a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 2$ donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq x + \frac{1}{x} \leq 2+3$

Donc f est majorée et minorée donc bornée sur $[\frac{1}{2}, 3]$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$ donc f n'est pas majorée sur $[1, +\infty[$ en revanche

f est minorée par 0, car si $x \geq 1$ alors $x \geq 0$ et $\frac{1}{x} \geq 0$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} x + \frac{1}{x} = +\infty$ donc f n'est pas majorée sur $]0,1]$ mais elle est minorée par 0 car si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$ et $x + \frac{1}{x} > 0$.

Dans les 2 derniers cas, f n'est pas bornée.

③ ⓐ Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = |2x-1| + |x+3| \leq |2x| + |1| + |x| + |3| = 2|x| + |x| + 4$

$\leq 3|x| + 4$ par la 1ère inégalité triangulaire

Soit $x \in [1,2]$. le max de $3|x|+4$ est $3 \times 2 + 4 = 10$ donc $\forall x \in [1,2]$, $f(x) \leq 10$.

ⓑ Soit $x \in [1,2]$

$2 \leq 2x \leq 4$ donc $1 \leq 2x - 1 \leq 3$ donc $1 \leq |2x-1| = 2x-1 \leq 3$

et $4 \leq x+3 \leq 5$ donc $4 \leq |x+3| = x+3 \leq 5$

Lorsque $x \in [1,2]$, $f(x) = 2x - 1 + x + 3 = 3x + 2$

$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow 5 \leq 3x+2 \leq 8$

le maximum de f est atteint en 2 et vaut 8. La majoration précédente était grossière.

④ ⓐ Soit $f_1 : x \mapsto \sin x - x$

$f_2 : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$

$f_3 : x \mapsto x - \frac{x^3}{6} - \sin x$

$f_4 : x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$

$f_5 : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$

toutes ces fonctions sont dérivables en tant que somme de fonctions dérivables

$f_1' : x \mapsto \cos x - 1$ $\quad f_1' \leq 0$

$f_2' : x \mapsto -x + \sin x$ $\quad f_2' = f_1$

$f_3' : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$ $\quad f_3' = f_2$

$f_4' : x \mapsto -\sin x + x - \frac{x^3}{6}$ $\quad f_4' = f_3$

$f_5' : x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ $\quad f_5' = f_4$

Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_1' \leq 0$, f_1 décroit et $f_1(0) = 0$ donc $f_1 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$, $\sin x - x \leq 0$

Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_2' \leq 0$, f_2 décroit et $f_2(0) = 0$ donc $f_2 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_3' \leq 0$, f_3 décroit et $f_3(0) = 0$ donc $f_3 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$

Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_4' \leq 0$, f_4 décroit et $f_4(0) = 0$ donc $f_4 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Sur $\mathbb{R}^+$, Comme $f_5' \leq 0$, f_5 décroit et $f_5(0) = 0$ donc $f_5 \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

④ⓑ $\forall x \geq 0$ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ donc $0,2 - \frac{0,2^3}{6} \leq \sin 0,2 \leq 0,2$ donc $0,198 \leq \sin 0,2 \leq 0,2$

$\forall x \geq 0$ $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ donc $0,96 \leq \cos 0,2 \leq 0,96007$

④ⓒ Soit $x > 0$ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ donc $-x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \leq -\sin x \leq -x + \frac{x^3}{6}$

donc $\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$ Par le th des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

Ex 8 TD4

① Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad |x+1| \leq 4$ ssi $-4 \leq x+1 \leq 4$ ssi $-5 \leq x \leq 3$ $\qquad S = [-5, 3]$

$|x+1| > 4$ ssi non $(-5 \leq x \leq 3)$ $\qquad S =]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[$

$|2x-4| \leq |x-1|$ ssi $(2x-4)^2 \leq (x-1)^2$

ssi $4x^2 + 16 - 16x \leq x^2 - 2x + 1$

ssi $3x^2 - 14x + 15 \leq 0$

$\Delta = 14^2 - 4 \times 3 \times 15 = 16 \qquad 3x^2 - 14x + 15 = 0$ ssi $x = \frac{5}{3}$ ou $x = 3$

Donc $S = [\frac{5}{3}, 3]$

② Comme $t \in [0,1]$, $t^n \geq 0$ et $1+t \geq 0$ donc $\frac{t^n}{1+t} \geq 0$. De plus $\frac{1}{1+t} \leq 1$ donc $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$

Ainsi $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$

③ Soit $x \in [0,1]$. $\quad 0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1+x^2 \leq 2$

et comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est st^t croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{1} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

④ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. $\quad 0 \leq x \leq 1$ donc $e^0 \leq e^x \leq e^1$ puisque exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $1 \leq e^x \leq e$ donc $1+1 \leq e^x+1 \leq e+1$

et $\frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$. De plus $e^{nx} > 0$ donc $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$.

⑤ Soit $f : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ et $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$.

f et g sont dérivables sur $]-1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables

$\forall x > -1, \quad f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x}$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$g(0) = \ln(1) - 0 = 0$ donc $\forall x > -1, \; g(x) \leq 0$.

$\forall x > -1, \quad f'(x) = \frac{1+x - x(1+x) - 1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	

$\lim\limits_{x \to 0} x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) = 0$ donc $\forall x > -1, \; f(x) \leq 0$.

Concl : $\forall x > -1, \; x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \leq 0$ et $\ln(1+x) - x \leq 0$

$\forall x > -1, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

⑥ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $k \in [\![1, n]\!]$ $\qquad \frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{2^k}$ puisque $2^k \leq k2^k$

donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ or $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$ puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$.

Donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq 1$