① ⓐ $f(i,3) = i\times 3 + -i\times 3 = \underline{0}$

$f(1+2i,-2+i) = (1+2i)(-2-i) + (1-2i)(-2+i) = -2 - i - 4i - 2i^2 - 2 + i + 4i - 2i^2$

$= \cancel{-2} \cancel{-i} \cancel{-4i} \cancel{+2} \cancel{-2} \cancel{+i} \cancel{+4i} \cancel{+2} = \underline{0}$

$f\left(e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = e^{\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{-2i\pi}{3}} + e^{\frac{-i\pi}{6}} e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)}$

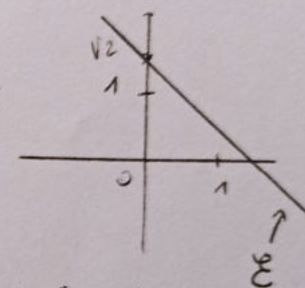
$= e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\right)} + e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right)} = e^{-i\frac{3\pi}{6}} + e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} + e^{\frac{i\pi}{2}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{0}$

d'après la 1ère formule d'Euler

① ⓑ $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z,z') = z\bar{z}' + \bar{z}z' = z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} = \underline{2\,\mathrm{Re}(z\cdot\bar{z}') \in \mathbb{R}}$

puisque l'on sait que $\forall Z \in \mathbb{C},\ Z + \bar{Z} = \mathrm{Re}(Z)$. Ici on prend $z\cdot\bar{z}'$ dans le rôle de Z.

① ⓒ Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. 0,5



$f(z, 1+i) = 2\sqrt{2}$ ssi $(a+ib)(\overline{1+i}) + (a-ib)(1+i) = 2\sqrt{2}$

ssi $(a+ib)(1-i) + a + ia - ib + b = 2\sqrt{2}$

ssi $a \cancel{-ia} \cancel{+ib} + b + a \cancel{+ia} \cancel{-ib} + b = 2\sqrt{2}$

ssi $2(a+b) = 2\sqrt{2}$ ssi $a+b = \sqrt{2}$.

2,5

L'ensemble ℰ des points recherchés est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $x+y=\sqrt{2}$. C'est la <u>droite d'équation $y = -x+\sqrt{2}$.</u>

0,5 pts si pas la bonne droite tracée si cohérent

② Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$g(z) \in \mathbb{R}$ ssi $g(z) = \overline{g(z)}$ ssi $\frac{z+2}{z-1} = \frac{\overline{z+2}}{\overline{z-1}}$ ssi $\frac{z+2}{z-1} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1}$

ssi $(z+2)(\bar{z}-1) = (\bar{z}+2)(z-1)$

ssi $z\bar{z} - z + 2\bar{z} \cancel{-2} = z\bar{z} - \bar{z} + 2z \cancel{-2}$

ssi $3\bar{z} = 3z$ ssi $z = \bar{z}$ ssi $z \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des points recherchés est <u>l'axe des abscisses privé du point d'abscisse 1</u>.

Exercice 2

① ⓐ $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ donc $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi\times\frac{3}{3}} = e^{2i\pi} = 1$

$j^2 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2$ donc $j^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}\times 2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = \overline{\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

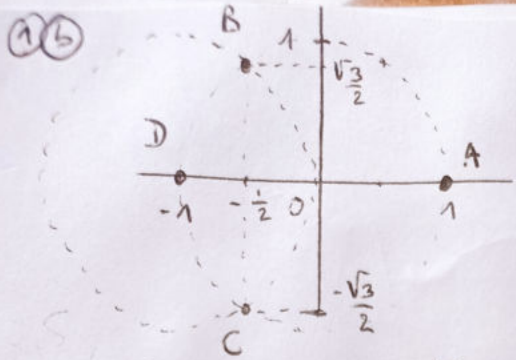
or $\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ donc $j^2 = \bar{j}$

$$\boxed{\begin{array}{c} j^3 = 1 \\ j^2 = \bar{j} \\ 1+j+j^2 = 0 \end{array}}$$

$1 + j + j^2 = e^{i0} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}}$ car $e^{\frac{2i\pi}{3}} \neq 1$

$= \frac{1 - e^{i2\pi\times\frac{3}{3}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{1-1}{1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 0.$

1 b



ABC est un triangle équilatéral.

Montrons le :

$AB = \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A| = |j-1| = |-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$

$AC = \|\vec{AC}\| = |z_C - z_A| = |j^2 - 1| = |-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$

$BC = \|\vec{BC}\| = |z_C - z_B| = |j^2 - j| = |-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})|$

$= |-2i\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{3}\,|-i| = \sqrt{3}$ donc $AB = AC = BC$

B et C sont symétriques par rapport à (Ox) car leurs affixes sont conjuguées

1 c Soit $M(z)$ où $z \in \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre $D(-1)$ et de rayon 1

$|z| = |z+1| = 1$ ssi $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} M \in \mathcal{C} \\ M \in \mathcal{C}' \end{cases}$

0,5 si cercle trigo

ssi $M = B$ ou $M = C$

1 d Soient p et q deux entiers naturels non nuls

Analyse : on suppose qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tq $z^p = 1$ et $(z+1)^q = 1$

alors $|z^p| = 1$ et $|(z+1)^q| = 1$ donc $|z|^p = 1$ et $|z+1|^q = 1$

donc $z \neq 0$.

Comme $p \neq 0$ et $q \neq 0$, $|z|^p = 1 \Rightarrow p \ln|z| = \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln|z| = 0 \Rightarrow |z| = 1$

et $|z| > 0$ et $|z+1| > 0$ $\quad |z+1|^q = 1 \Rightarrow q \ln|z+1| = \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln|z+1| = 0$

$\Rightarrow |z+1| = 1.$

Donc d'après 1 c $\quad z = j$ ou $z = j^2$

Synthèse : • si p est un multiple de 3 et si q est un multiple de 6,

alors $j^p = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^p = e^{2i\pi\frac{p}{3}} = 1$

et $(j+1)^q = (-j^2)^q = \left(e^{-i\pi} e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)^q = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^q = e^{2i\pi\frac{q}{6}} = 1$

donc j est solution

et $(j^2)^p = \left(e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)^p = e^{2i\pi \times \frac{2p}{3}} = 1$

et $(j^2+1)^q = (-j)^q = \left(e^{-i\pi} e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^q = \left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^q = e^{-2i\pi\frac{q}{6}} = 1$

donc j^2 est solution

• sinon il n'y a pas de solution

Conclusion : Si p est un multiple de 3 et q un multiple de 6, il y a 2 solutions : j et j^2. Sinon il n'y a pas de solution

2 a Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. On sait que $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ donc $2j = -1 + \sqrt{3}$

donc $\sqrt{3}i = 2j+1$ donc $i = \frac{2}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}j + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc $z = a+ib = a + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}j + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)b = \underbrace{\left(a + \frac{\sqrt{3}}{3}b\right)}_{x} + \underbrace{\frac{2\sqrt{3}}{3}b}_{y}\,j$

$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

On a donc $\boxed{\begin{cases} x = a + \frac{\sqrt{3}}{3}b \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3}b \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ a = x - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}y = x - \frac{1}{2}y \end{cases}}$.

(2b) Soit $z = x + jy$ et $z' = x' + jy'$

$j^2 = \bar{j}$ et $j + \bar{j} = 2\,\mathrm{Re}(j) = -1$

donc $j^2 = \bar{j} = -1 - j$

3/4

$$zz' = (x+jy)(x'+jy') = xx' + jxy' + jyx' + j^2 yy'$$
$$= xx' + j(xy' + yx') + (-1-j)yy'$$
$$= xx' - yy' + j(xy' + yx' - yy')$$

$$z + z' = (x+x') + j(y+y')$$

$$jz = j(x+jy) = jx + j^2 y = jx + (-1-j)y = -y + j(x-y)$$

$$j^2 z = j^2(x+jy) = j^2 x + j^3 y = (-1-j)x + y = -x + y + j(-x)$$

$$\bar{z} = \overline{x+jy} = \bar{x} + \bar{j}\bar{y} = x + (-1-j)y = x - y + j(-y)$$

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x+jy)\big((x-y) + j(-y)\big) = x(x-y) + j(-xy) + j(yx - y^2) - (-1-j)y^2$$
$$= x^2 - xy - \cancel{jxy} + \cancel{jxy} - \cancel{y^2 j} + y^2 + \cancel{y^2 j} = (x^2 - xy + y^2)$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - y + j(-y)}{x^2 - xy + y^2} = \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} + j\,\frac{-y}{x^2-xy+y^2}$$

3 a

$2 + 3j,\ j,\ 0$

3 b Soit $z = x + jy$ et soit $z' = x' + jy'$ où $(x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4$.

alors $z + z' = \underbrace{(x+x')}_{\in \mathbb{Z}} + j\underbrace{(y+y')}_{\in \mathbb{Z}}$

$z - z' = (x - x') + j(y - y')$ → 0,5 si pas $\mathbb{Z}$.

$zz' = \underbrace{xx' - yy'}_{\in \mathbb{Z}} + j(\underbrace{xy' + yx' - yy'}_{\in \mathbb{Z}})$

Donc la somme, la différence et le produit de 2 élts de E est un élt de E

3 c Soit $z = x + jy \in E$

alors $|z|^2 = x^2 - xy + y^2 \in \mathbb{Z}$

De plus $x^2 - xy + y^2$

$= (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$ donc $|z|^2 \in \mathbb{N}$

3 d Soit $z \in E$. On suppose que $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$ donc $z\bar{z} = 1$

Comme $z \in E$, $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tq $z = x + jy$. Alors $\bar{z} = \underbrace{x-y}_{\in \mathbb{Z}} + j(\underbrace{-y}_{\in \mathbb{Z}})$

donc $\bar{z} \in E$

Ainsi $\exists z' = \bar{z} \in E$ tq $zz' = 1$.

Réciproquement. Supposons qu'il existe $z' \in E$ tq $zz' = 1$

alors $|zz'| = 1$ donc $|z||z'| = 1$ donc $|z|^2|z'|^2 = 1$ or d'après

3 c $|z|^2 \in \mathbb{N}$ donc $|z|^2 = |z'|^2 = 1$ donc $|z| = 1$ et $|z'| = 1$

on a montré par double implication que

$$(z \in E \text{ et } |z| = 1) \Leftrightarrow (\exists z' \in E \text{ tq } zz' = 1)$$

3 e Soit $z \in E$. $z \in F$ ssi $|z| = 1$

$$
\begin{aligned}
&\text{ssi } |z|^2 = 1 \\
&\text{ssi } z\bar{z} = 1 \\
&\text{ssi } x^2 - xy + y^2 = 1 \\
&\text{ssi } \left(x - \tfrac{y}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 = 1 \\
&\Rightarrow \tfrac{3}{4}y^2 \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq \tfrac{4}{3} \Rightarrow |y| \leq \sqrt{\tfrac{4}{3}} \\
&\Rightarrow -1{,}5 < \tfrac{-2}{\sqrt{3}} \leq y \leq \tfrac{2}{\sqrt{3}} < 1{,}5
\end{aligned}
$$

or $y \in \mathbb{N}$ donc $y \in \{-1, 0, 1\}$

Si $y = -1$ alors $x^2 + x + 1 = 1$ donc $x(x+1) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -1$

Si $y = 0$ alors $x^2 - 0 + 0^2 = 1$ donc $x = \pm 1$

Si $y = 1$ alors $x^2 - x + 1 = 1$ donc $x(x-1) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = 1$

Réciproquement, on vérifie que :

$j^2 = -1 - j$, $-j, -1, 1, j$ et $1 + j = -j^2$ sont éléments de F en vérifiant que leur module est égal à 1.

Concl : $F = \{-1, 1, j, -j, \underbrace{1+j}_{= -\bar{j}}, \underbrace{-1-j}_{= \bar{j}}\}$.