

TD 5 : applications et relations

► Exercice 1 :

1. Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$. f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Montrer qu'il existe une bijection de $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.

► Exercice 2 : Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective. A-t-on nécessairement g injective ?
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. A-t-on nécessairement f surjective ?
3. Montrer que toute application involutive est bijective.

► Exercice 3 : Soient E, F et G des ensembles, f et g deux applications de E dans F , h et k deux applications de F dans G . Montrer que :

1. si f est surjective alors $(h \circ f = k \circ f \Leftrightarrow h = k)$.
2. si h est injective alors $(h \circ f = h \circ g \Leftrightarrow f = g)$.

► Exercice 4 : Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et B une partie quelconque de F .

1. Montrer l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Montrer que l'égalité est vraie pour tout B ssi f est surjective.

► Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et A une partie quelconque de E .

1. Comparer A et $f^{-1}(f(A))$.
2. A-t-on l'équivalence : $(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A) \Leftrightarrow f$ est injective ?

► Exercice 6 : Dans chacun des cas suivants, examiner injectivité et surjectivité éventuelles de f ; précisez l'ensemble des valeurs (ou ensemble image) :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1], x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

► Exercice 7 : On définit sur $\mathbb{C}$ une relation binaire en posant $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Décrire la classe d'équivalence d'un élément z de $\mathbb{C}$.

► Exercice 8 : Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Décrire la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

► Exercice 9 : On définit sur $\mathbb{N}^2$ une relation binaire en posant $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$. Cet ordre est-il total?
2. On pose $A = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$. Déterminer majorants, minorants, extrema de A .
3. Reprendre la question précédente avec $B = \{(2, 1), (1, 3), (5, 2), (1, 5), (5, 6)\}$.