Chapitre 6 : Nombres complexes : équations algébriques et géométrie

1 Forme trigonométrique des nombres complexes

L'intérêt de cette notation vient de la difficulté à multiplier des nombres complexes ou à les diviser lorsqu'ils sont écrits sous forme algébrique.

1.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \neq 0$ mis sous forme $a + ib$, alors $|z| \neq 0$, donc on peut écrire $z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$; mais posons $\begin{cases} \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$, alors $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc d'après le chapitre précédent,

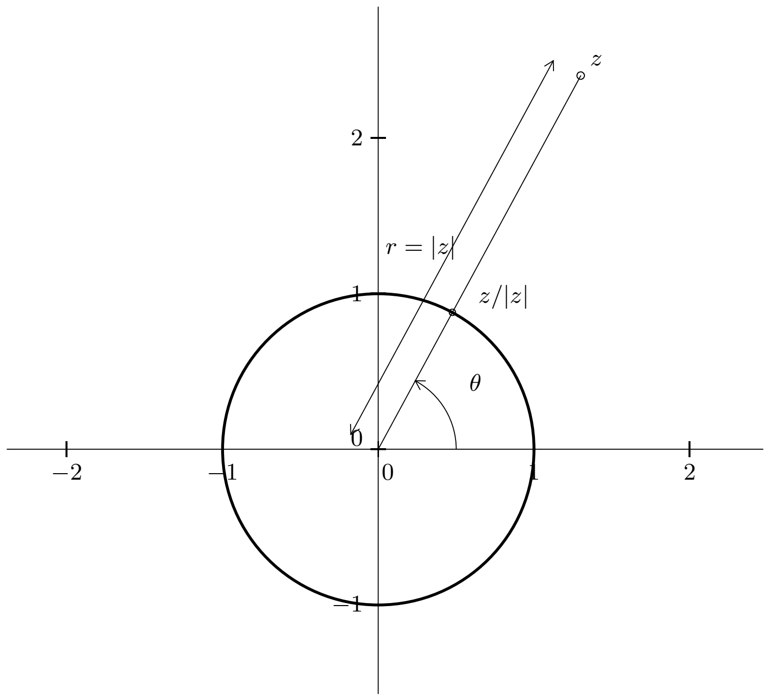
$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \alpha + i\beta = e^{i\theta}$$

et $z = |z|\, e^{i\theta}$

Définition 1 (Forme trigonométrique, forme exponentielle, forme polaire).

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a démontré l'existence d'un réel θ tel que $z = |z|\, e^{i\theta}$, un tel réel s'appelle argument de z. On pose $\rho = |z|$.
On appelle forme trigonométrique de z l'écriture $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.
On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = \rho e^{i\theta}$.
On appelle forme polaire[1] de z l'écriture $z = (\rho, \theta)$.

Interprétation géométrique : Soit M point du plan d'affixe z dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. $\arg(z)$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$



Propriété 1.

Il n'y a pas unicité de l'écriture en notation exponentielle.
Si $z \in \mathbb{C}^*$ et θ est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est l'ensemble $\theta + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Définition 2 (Congruence modulo 2π).

Soient a et b deux nombres réels. On dit que a est congru à b modulo 2π si 2π divise $a - b$. On dit aussi que a et b sont congrus modulo 2π. On écrit :

$$a \equiv b\ [2\pi] \text{ ou } a \equiv b\ \ [2\pi]\ \ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a - b = 2k\pi$$

► Exemple :$\frac{\pi}{2} \equiv \frac{5\pi}{2}\ [2\pi]$, $\frac{-3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Pour signifier que θ est un argument de z, on notera donc $\arg z \equiv \theta\ \ [2\pi]$.

Remarque 1. arg(0) *n'existe pas.*

► Méthode : Si $z = ae^{i\theta}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, on doit étudier le signe de a :
si $a > 0$, alors $|z| = a$ et $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$ et si $a < 0$, $|z| = -a$ et $\arg(z) \equiv \theta + \pi$.

► Exemple : Mettre sous forme trigonométrique le complexe $z = 1 - i$.

Définition 3.

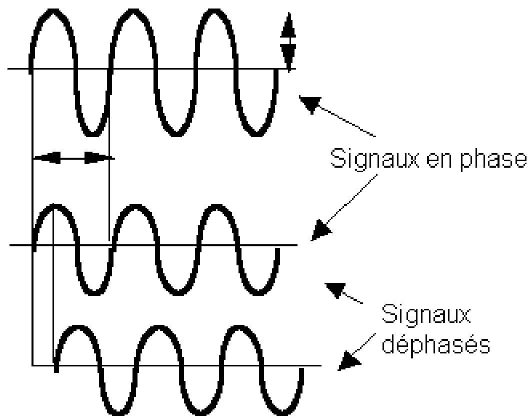
L'argument principal de z est l'unique argument de z compris dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. L'argument principal de z est unique, on le note $Arg(z)$.

Application : Réduction de $a\cos x + b\sin x$.
Soient a et b des réels quelconques non tous les deux nuls.

— En considérant le nombre complexe $z = a + ib$, montrer qu'il existe des réels r et θ tels que $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.
— En déduire que $A = a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \theta)$.
— Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$.

Remarque 2. *Cette réduction est classique en physique avec les mouvements vibratoires sinusoïdaux, où un point vibrant possède une élongation (écart par rapport à la position d'équilibre) du type $y = a\cos(\omega t + \phi)$, où a est l'amplitude (élongation maximum), ω la pulsation, $\omega t + \phi$ la phase à l'instant t et ϕ la phase à l'origine. On peut aussi utiliser un sinus.*

π



1.2 Règles de calcul sous forme trigonométrique

Propriété 2 (Propriétés des arguments).

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls. Alors :
— $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
— $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
— $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

Conséquence : Pour multiplier deux nombres complexes non nuls on multiplie les modules et on ajoute les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on retranche les arguments.

1.3 Fonction exponentielle complexe

Définition 4 (Fonction exponentielle complexe).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, d'écriture algébrique $x + iy$, on pose

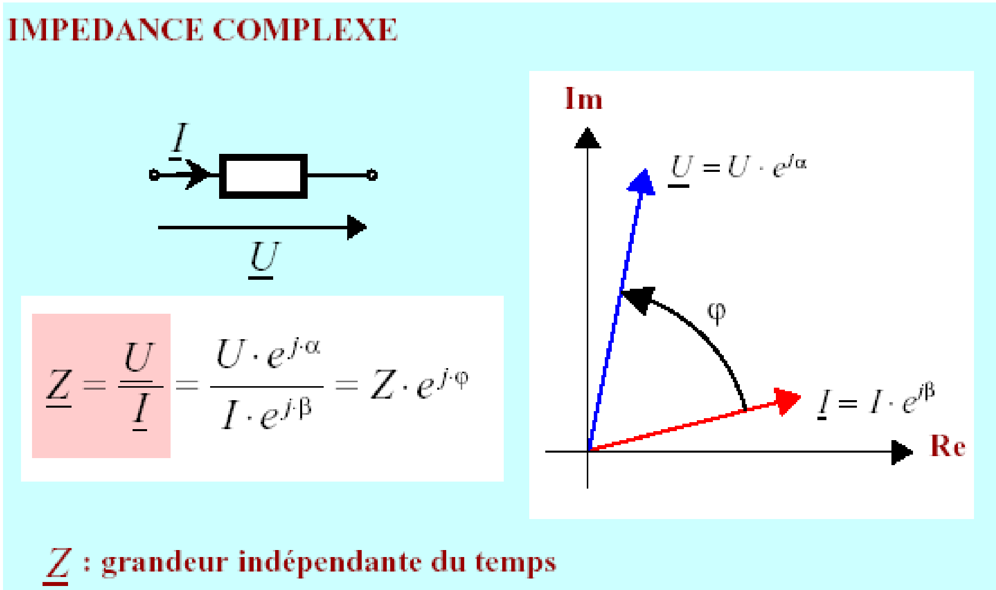
$$\exp(z) = e^z = e^x e^{iy}$$

La fonction

$$\exp\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z)$$

*est appelée **fonction exponentielle complexe**.*

Application : Définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.
En régime sinusoïdal forcé (dipôle linéaire passif), toutes les grandeurs électriques sont sinusoïdales à la même pulsation ω et les grandeurs complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont proportionnelles. On appelle impédance complexe le coefficient de proportionnalité qui se note $\underline{Z}$. Le module de $\underline{Z}$ est l'impédance du dipôle, sa partie réelle est la résistance du dipôle et sa partie imaginaire sa réactance.



Théorème 1.

La fonction exp *vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La fonction* exp *est $2i\pi$-périodique, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a* $\exp(z + 2i\pi) = \exp(z)$
2. *Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a* $\exp(z + z') = e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Propriété 3.

Soit $z \in \mathbb{C}$; $\begin{cases} |e^z| = e^{\mathrm{Re} z} \\ \arg e^z \equiv \mathrm{Im} z \, [2\pi] \end{cases}$

Propriété 4.

$e^z = e^{z'}$ *si et seulement si il existe une entier k tel que* $z' = z + 2ik\pi$

▶ Exemple : $e^z = 1 + i \Leftrightarrow z = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$.

2 Racines nièmes d'un nombre complexe

Soient $Z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre l'équation $z^n = Z_0$.

Définition 5.

On dit qu'un nombre complexe z est une ***racine*** *n-ième de Z_0 si z est solution de $z^n = Z_0$.*

Propriété 5.

Supposons $Z_0 \neq 0$. Alors l'ensemble des solutions de $z^n = Z_0$ est de cardinal n. Autrement dit, Z_0 admet n racines n-ièmes qui sont :

$$\sqrt[n]{|Z_0|}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k = 0, .., n-1$$

où θ est un argument de Z_0.

Remarque 3. *La seule racine n-ième de 0 est 0.*

2.1 Racines carrées

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. On cherche à trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$.

Méthode trigonométrique Soit $Z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$.
Soit $z = re^{it} \in \mathbb{C}$.
$\rho = |z| > 0$ et $r = |z| \geq 0$.
$z^2 = Z$ ssi $r^2 e^{2it} = \rho e^{i\theta}$ ssi $\begin{cases} r^2 = \rho \\ 2t = \theta\,[2\pi] \end{cases}$ ssi $\begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ t = \dfrac{\theta}{2}\,[\pi] \end{cases}$
Ainsi $z^2 = Z$ ssi $z = z_1 = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $z = z_2 = -\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}} = -z_1$.
D'où le théorème :

Théorème 2.

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées qui sont opposées l'une de l'autre.

Méthode algébrique Soit $Z = X + iY \in \mathbb{C}^*$.
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
$\rho = |z| > 0$ et $r = |z| \geq 0$.
$z^2 = Z$ ssi $x^2 - y^2 + 2xyi = X + iY$ ssi $\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \\ |Z| = |z|^2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \end{cases}$

Ainsi $z^2 = Z$ ssi $\begin{cases} \operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(Y) \\ x^2 = \dfrac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2} \end{cases}$

► Exemple : Trouver les racines carrées de :
- $Z_0 = 1 + i$ (réponse : $2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{8}}$ et son opposé).
- $Z_1 = 3 + 4i$ (réponse : $2 + i$ et son opposé).
- $Z_2 = 7 + 24i$ ($24^2 = 576$) (réponse : $4 + 3i$ et son opposé).
- $Z_3 = -24 + 10i$ (réponse : $1 + 5i$ et son opposé).
- $Z_4 = -7 - 24i$ (réponse : $3 - 4i$ et son opposé).

2.2 Application : résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Les nombres complexes a, b et c étant fixés avec $a \neq 0$, on veut résoudre l'équation d'inconnue complexe z $az^2 + bz + c = 0$.

Théorème 3.

Cette équation possède deux solutions (éventuellement confondues) valant $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est l'une des racines carrées du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

En effet, factorisons cette équation afin d'en extraire les racines :
$az^2 + bz + c = 0$ ssi $a(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}) = 0$ car a est non nul
ssi $a(z^2 + 2 \times \dfrac{bz}{2a} + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}) = 0$
ssi $a((z + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{4ac}{4a^2}) = 0$
ssi $a((z + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}) = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** de $az^2 + bz + c = 0$. On note δ une de ses racines carrées.
$az^2 + bz + c = 0$ ssi $a((z + \dfrac{b}{2a})^2 - (\dfrac{\delta}{2a})^2) = 0$
ssi $a((z + \dfrac{b}{2a}) - \dfrac{\delta}{2a})((z + \dfrac{b}{2a}) + \dfrac{\delta}{2a}) = 0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul, et comme $a \neq 0$, on obtient bien le résultat demandé.
Notons que si $\Delta = 0$, alors $\delta = 0$ et l'équation admet alors une unique solution $z = \dfrac{-b}{2a}$.

Remarque 4. *Dans le cas où a, b et c sont réels on retrouve les résultats vus au lycée :*
*Lorsque a, b, c sont **réels** (et toujours $a \neq 0$)*

— *Si $\Delta = 0$, alors $az^2 + bz + c = 0$ possède une unique solution : $x = \dfrac{-b}{2a}$*
— *Si $\Delta > 0$, alors $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*
— *Si $\Delta < 0$, alors $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions distinctes complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$*

► Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+4i)z + 5(1+i) = 0$ (Réponse : $\delta = 1-6i$ ou $-1+6i$ $z = 1-i$ ou $z = 5i$). On précise que $\sqrt{35^2 + 12^2} = 37$.
► Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 1 - 2i = 0$ (Réponse : $\delta = 2+2i$ ou $-2-2i$ $z = 1$ ou $z = -1-2i$).
► Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + 4(2+i)z + 3i + 8 = 0$ (Réponse : $\delta = 2(4+i)$ ou $-2(4+i)$ $z = -1$ ou $z = -3+8i$).

Propriété 6 (Relations coefficients-racines).

Soient z_1 et z_2 les deux racines, éventuellement confondues, du polynôme $aX^2 + bX + c$. Alors

$$z_1 + z_2 = -b/a \text{ et } z_1 z_2 = c/a$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

2.3 Racines n-ième de l'unité

Soit n un entier positif non nul.

Définition 6.

On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Propriété 7.

$\mathbb{U}_n$ est de cardinal n (c'est-à-dire qu'il existe exactement n racines nièmes de l'unité, qui sont les nombres complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, avec $1 \leq k \leq n$). Autrement dit,

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0, .., n-1\}$$

Propriété 8.

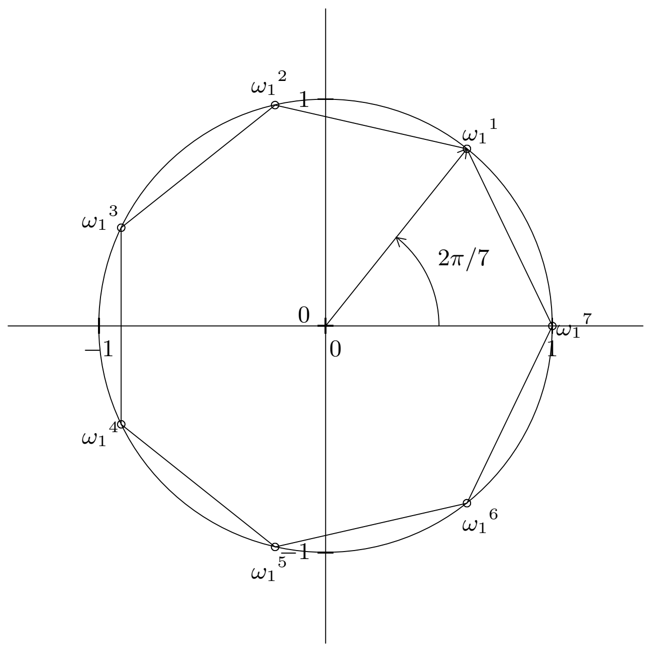
1. *$\mathbb{U}_n$ est contenu dans $\mathbb{U}$.*
2. *Si $z, z' \in \mathbb{U}_n$, alors zz', $\overline{z}$ et $\dfrac{z}{z'}$ sont aussi dans $\mathbb{U}_n$*
3. *Posons $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors*
$$\mathbb{U}_n = \{{\omega_1}^k, k = 0, .., n-1\}$$
4. *Si $n \geq 2$, alors*
$$\sum_{k=0}^{n-1} {\omega_1}^k = 0$$
5. *Les racines nièmes de l'unité non réelles sont conjuguées deux à deux. L'inverse d'une racine nième de l'unité est égale à son conjugué et c'est une racine nième de l'unité.*
6. *Le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ vaut $(-1)^{n-1}$.*

2.4 Points images des racines nièmes de l'unité

Propriété 9.

Pour $n \geq 2$, les n points images des racines nièmes de l'unité sont les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

► Exemple : Pour $n = 2$: les racines carrées de l'unité sont 1 et -1. $1 + (-1) = 0$. Pour $n = 3$: les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2, avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique. $1 + j + j^2 = 0$. Pour $n = 4$: les racines quatrièmes de l'unité sont 1, i, $-i$ et -1. $1 + (-1) + i + (-i) = 0$. $M_0M_1M_2M_3$ est un carré inscrit dans le cercle trigonométrique, etc...pour $n = 5$: pentagone régulier, pour $n = 6$ hexagone régulier et pour $n = 7$: heptagone régulier.



L'ensemble $\mathbb{U}_7$

2.5 Racines nièmes d'un nombre complexe

Théorème 4.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, tout nombre complexe non nul admet exactement n racines nièmes. De plus, les racines s'obtiennent en multipliant l'une d'entre elles par les racines nièmes de l'unité.

► Exemple : Résoudre $z^3 = 8$.

Théorème 5.

Les racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les n premiers termes d'une suite géométrique. De plus, leur somme est nulle.

Théorème 6.

Les n points images des racines nièmes d'un nombre complexe z non nul sont les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $|z|^{\frac{1}{n}}$.

► Exemple : Résoudre $z^4 = 2 - 2i$.

Indications : $2 - 2i = \sqrt{8}e^{\frac{7i\pi}{4}}$. Une racine quatrième est $\sqrt{8}^{\frac{1}{4}}e^{\frac{7i\pi}{16}}$. Pour trouver les autres, multiplier par i, -1 et $-i$.

3 Application des complexes à la géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note z_A l'affixe de A, z_B l'affixe de B, z_C l'affixe de C et z_D l'affixe de D.

3.1 Caractérisation de configurations données

— égalité vectorielle : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$
— égalité de deux distances : $AB = CD \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_D - z_C|$
— égalité angulaire : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \alpha[2\pi] \Leftrightarrow \arg\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \alpha[2\pi]$

3.2 Applications

3.2.1 Parallélisme

Théorème 7.

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D et tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. $(AB)||(CD)$ si et seulement si l'une des trois conditions est vérifiée :

1. *Il existe un réel non nul k tel que $z_D - z_C = k(z_B - z_A)$*
2. $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
3. $\arg\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 0[\pi]$

3.2.2 Alignement

Théorème 8.

Soient A et B deux points distincts. $M \in (AB)$ si et seulement si l'une des trois conditions est vérifiée :

1. *Il existe un réel k tel que $z_M - z_A = k(z_B - z_A)$*
2. $\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
3. $\arg\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A} = 0[\pi]$ *ou* $M = A$

3.2.3 Orthogonalité

Théorème 9.

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D et tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. $(AB) \perp (CD)$ si et seulement si l'une des deux conditions est vérifiée :

1. $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$
2. $\arg\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

3.2.4 Triangles particuliers

Soient A, B et C trois points non alignés.

— ABC est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ si et seulement si $\arg\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
— ABC est isocèle en A si et seulement si $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$ si et seulement si $\arg\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \arg\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}[2\pi]$

— ABC est équilatéral direct si et seulement si $z_C - z_A = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_B - z_A)$, indirect si et seulement si $z_C - z_A = e^{\frac{-i\pi}{3}}(z_B - z_A)$

3.2.5 Milieu, barycentre, médiatrice

— I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $z_I = \dfrac{1}{2}(z_A + z_B)$.
— G est le barycentre de $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$ si et seulement si $z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.
— M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$.

3.2.6 Cercle

Propriété 10.

M appartient au cercle de centre A et de rayon R si et seulement si $|z_M - z_A| = R$.
M appartient au disque de centre A et de rayon R si et seulement si $|z_M - z_A| \leq R$.

Propriété 11.

M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B si et seulement si $\arg\dfrac{z_B - z_M}{z_A - z_M} = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

► Exemple : $A(2i)$, $B(1-i)$, $E(-1+i)$. Montrer que ABE est rectangle en E.

► Exemple : $A(2)$ et $B(i)$. Déterminer C tel que ABC est équilatéral. ($C(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i(\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}))$ ou $C(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}))$).

3.3 Caractérisation des transformations

Définition 7 (Transformation du plan).

Une transformation du plan est une bijection du plan sur lui-même.

► Exemple :une rotation, une translation, une symétrie axiale, une homothétie de rapport non nul. L'écriture complexe d'une application plane f est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, notée ϕ, définie ainsi :
Si z est l'affixe de M, alors $z' = \phi(z)$ est l'affixe de $M' = f(M)$. Lorsque f est une transformation, l'écriture complexe de f est une bijection de $\mathbb{C}$ sur lui-même.
Maintenant, soit ψ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Il est manifeste que l'application du plan dans lui-même, qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ avec $z' = \psi(z)$, est l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ dont l'écriture complexe est ψ.

3.3.1 Translations

Propriété 12.

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ d'affixe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Alors l'image M' de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe

$$z' = z + \alpha$$

Définition 8.

Avec les notations précédentes, l'application

$$t_{\overrightarrow{u}} \ : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto z + \alpha$$

est encore appelée ***translation de vecteur*** $\overrightarrow{u}$.

3.3.2 Homothéties

L'homothétie de $\mathcal{P}$ de centre $A \in \mathcal{P}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ est l'application qui à un point M de $\mathcal{P}$ associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.

Traduisons ceci avec les nombres complexes : si z et z' sont les affixes respectives de M et M' alors $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ se traduit par $z' - z_A = k(z - z_A)$ donc $z' = k(z - z_A) + z_A$.

Propriété 13.

Soient $A \in \mathcal{P}$ d'affixe $z_A \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et $M' \in \mathcal{P}$, d'affixe $z' \in \mathbb{C}$, l'image de M par l'homothétie de centre A de rapport k. Alors

$$z' = k(z - z_A) + z_A$$

Définition 9.

Avec les notations précédentes, l'application

$$h_{A,k} \; : \; \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto k(z - z_A) + z_A$$

*est encore appelée **homothétie** de centre z_A et de rapport k.*

Remarque 5. *Ainsi, multiplier un nombre complexe z par un réel k revient à effectuer une homothétie de centre O.*

3.3.3 Rotations

Si f est la rotation de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle θ alors pour tout $M \neq \Omega$, $f(M) = M'$ ssi
$\Omega M = \Omega M'$ et mes $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\,[2\pi]$ ssi
$|z' - \omega| = |z - \omega|$ et $\arg \dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta[2\pi]$ ssi
$\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = 1$ et $\arg \dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta[2\pi]$ ssi
$\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$.

Propriété 14.

Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Alors l'image M' de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ a pour affixe

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Définition 10.

Avec les notations précédentes, l'application

$$r_{\omega,\theta} \; : \; \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

*est appelée **rotation** de centre ω et d'angle θ.*

Remarque 6. *Ainsi, multiplier un nombre complexe z par $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, revient à appliquer la rotation de centre O et d'angle θ à l'image de z.*

► Exemple : Donner l'écriture complexe de la rotation r d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre $A(1 - 2i)$.

3.3.4 Ecritures complexes caractéristiques

Théorème 10.

Soit $b \in \mathbb{C}$. La transformation plane dont l'écriture complexe est de la forme :

- $z' = z + b$ *est la translation de vecteur* b.
- $z' = kz + b$ *avec* k *réel non nul,* $k \neq 1$, *est une homothétie de centre* A *d'affixe* $z_A = \dfrac{b}{1-k}$ *et de rapport* k.
- $z' = az + b$, *avec* $a \in \mathbb{C}$ *tel que* $a \neq 1$ *et* $|a| = 1$ *est la rotation de centre* Ω *d'affixe* $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ *et d'angle* $\arg(a)$.
- $z' = \bar{z}$ *est la réflexion*[2] *par rappport à l'axe des abscisses.*