

formule de Moivre (P)

Ex1 Soit $n \geq 2$

$$1-a. \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k = \frac{e^{i0} - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}}, \text{ car } e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1 \text{ (P)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{1 - e^{\frac{2i\pi n}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \boxed{0}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \operatorname{Re}(0) = \boxed{0}$$

la partie réelle est linéaire,

1-b. Soit $k \in \{0, n-1\}$

$$\left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|^2 = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right) \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right)^* = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right) \left(e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right)$$

$$= e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} + 1$$

$$= 1 - \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \right) + 1 = \boxed{2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}}$$

formule d'Euler (P)

par linéarité de la somme (P)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} 1 - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n}$$

$$= 2n - 2 \times 0 = \boxed{2n}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1 - \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \text{ car } e^{\frac{i\pi}{n}} \neq 1 \text{ (P)}$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1 - (-1)}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{2}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}} \left(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{2}{-e^{\frac{i\pi}{2n}} 2i \sin\frac{\pi}{2n}}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(+ \frac{i e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}} e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}} (n-1)}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)$$

$$\frac{1}{-i} = i$$

$$= \operatorname{Im} \left(\frac{\cos \frac{\pi(n-1)}{2n} + i \sin \left(\frac{\pi(n-1)}{2n} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right) \quad 0,5$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{\pi(n-1)}{2n} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \quad 0,5$$

1 (2b) $\tan$ est dérivable en 0 et $\tan 0 = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = 1$. Or $\tan 0 = 0$, donc la limite recherchée vaut 1.

(2c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \left[\tan \frac{\pi}{2n} \times \frac{\pi}{2n} \right]} \quad 0,5$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}} \times \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \quad \text{on pose } x = \frac{\pi}{2n}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x} \times \frac{2}{\pi} = 1 \times \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$

1 (3a) $(e^{ix} + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx}$

1 (3b) $(e^{ix} + 1) = e^{ix/2} (e^{ix/2} + e^{-ix/2}) = e^{ix/2} (2 \cos \frac{x}{2}) \quad 0,5$

(3c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \left(\binom{n}{k} e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left((e^{ix} + 1)^n \right)$

ou $(e^{ix} + 1)^n = \left(e^{ix/2} (2 \cos \frac{x}{2}) \right)^n = \left(e^{ix/2} \right)^n 2^n \left(\cos \frac{x}{2} \right)^n$

$= 2^n \left(\cos \frac{x}{2} \right)^n e^{i \frac{nx}{2}} = 2^n \left(\cos \frac{x}{2} \right)^n \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right) \quad 0,5$

(4) donc $\operatorname{Re} \left((e^{ix} + 1)^n \right) = 2^n \left(\cos \frac{x}{2} \right)^n \cos \left(\frac{nx}{2} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx$

$\prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n} k} \right) = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^{\frac{n-1}{2} n} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n}{2}} \right)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad 0,5$

① $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc par somme et produit, f et g aussi.
Soit $x \in \mathbb{R}$

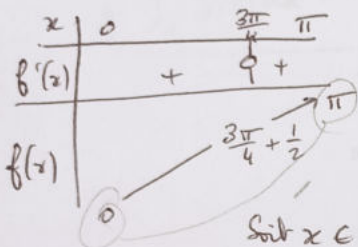
1,5 $f(-x) = -x + (\sin(-x))^2 = -x + (-\sin(x))^2 = -x + \sin^2 x$. Ainsi : $\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 1 \text{ alors que} \\ f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + 1 \neq f(\frac{\pi}{2}) \end{cases}$
on a donc f qui n'est ni paire, ni impaire. Idem pour g et $f(-\frac{\pi}{2}) \neq -f(\frac{\pi}{2})$

② Soit $x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ donc $0+x \leq x+\sin^2 x \leq 1+x$
d'où $x \leq f(x) \leq x+1$.

0,5 $\mathcal{E}f$ est donc à l'intérieur d'une zone délimitée par les droites d'équation
 $y=x$ et $y=x+1$

③ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables,
et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x = f'(x)$

④ $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, donc $1-1 \leq 1+\sin 2x \leq 1+1$ donc $f'(x) \geq 0$,



$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = \pi$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad 1 + \sin 2x = 0 \text{ si } \sin 2x = -1 \text{ c'est-à-dire } 2x = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{2}$$

⑤ Comme $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$, on a :

une équation de la tangente à $\mathcal{E}f$ au pt d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$ est : $y = f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
Soit $y = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$, (tangente horizontale)

⑥ Si la tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation $y=x$ ou $y=x+1$,
c'est que l'on a : $f'(x_0) = 1$

ou pour tout $x_0 \in [0, \pi]$, $f'(x_0) = 1$ si $1 + \sin 2x_0 = 1$ c'est-à-dire $\sin 2x_0 = 0$ si $2x_0 = 0$ ou π

Au point d'abscisse 0, la tangente à $\mathcal{E}f$ a pour équation $y = 1(x-0) + f(0)$ c'est-à-dire $y=x$
si $x_0 = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$
ou $x_0 = \pi$

et $y = x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 1$, c'est-à-dire $y = x+1$ car $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$.

⑦ Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(x+\pi) = x+\pi + (\sin(x+\pi))^2 = x+\pi + (-\sin x)^2 = x+\pi + \sin^2 x = f(x) + \pi$
 $\mathcal{E}f$ s'obtient par translation de la courbe représentative de f sur $[0, \pi]$ de
vecteur $m\pi(\vec{i} + \vec{j})$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

1 bonsoir (En effet, soit $M(x, y) \in \mathcal{E}f$. Soit $M'(x+m\pi, y+m\pi)$ l'image de M par la
translation de vecteur $m\pi(\vec{i} + \vec{j})$ alors $M' \in \mathcal{E}f$ puisque
 $f(x+m\pi) = f(x) + m\pi = y + m\pi$ d'après ce qui précède.

⑧ voir au dos

③a Soit $x \in \mathbb{R}$ $0 \leq (\sin x)^2 \leq 1$ donc $0 \leq (\sin x)^4 \leq (\sin x)^2 \leq 1$

Ainsi $x + (\sin x)^4 \leq x + (\sin x)^2$ et $g(x) \leq f(x)$.

$\mathcal{E}g$ est en dessous de $\mathcal{E}f$.

③b) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x)^4 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = + \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

formule d'Euler $\rightarrow$ binôme de Newton

2

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4 \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{6}{2} \right)$$

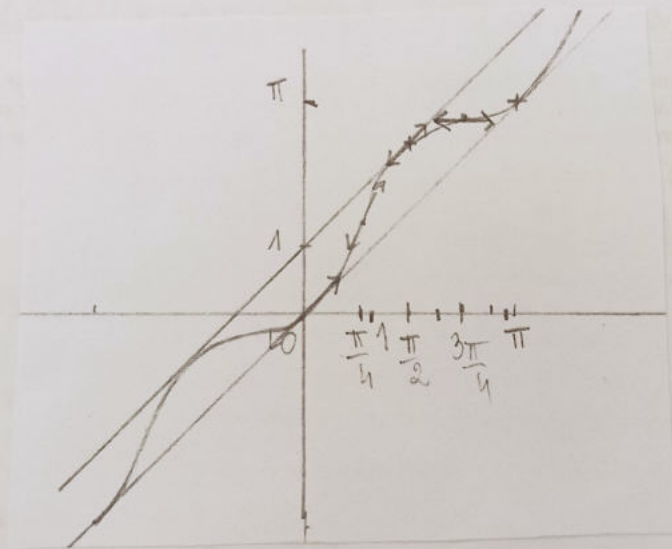
$$\boxed{(\sin x)^4 = \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \textcircled{c} \quad \int_0^\pi g(x) dx &= \int_0^\pi (x + (\sin x)^4) dx = \int_0^\pi \left(x + \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{32} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8} x \right]_0^\pi \end{aligned}$$

2,5

$$\boxed{\int_0^\pi g(x) dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{8} \pi} \quad \text{car } \sin(4\pi) = \sin(2\pi) = \sin(0) = 0$$

⑧



asymptote: 0,5
1 bar: 0,5
les 2 autres 0,5
courbe $\frac{1}{2}$
translatée 0,5

Ex 3

5/6

① $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $A \cap B = \{2, 3\}$

1,5 donc $A \Delta B = \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$

② $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$
 $= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$
 2 $= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = \boxed{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$

③ $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$
 $A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$
 2 $A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \bar{A}$
 $A \Delta \bar{A} = (A \cup \bar{A}) \setminus (A \cap \bar{A}) = E \setminus \emptyset = E$

④ Soit $C \in \mathcal{P}(E)$
 $(A \Delta B) \cap C = [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C = [(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C]$
 $= (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$ *lemme 1*

$(A \cap C) \Delta (B \cap C) = [(A \cap C) \cap (\overline{B \cap C})] \cup [(B \cap C) \cap (\overline{A \cap C})]$
 $= [(A \cap C) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})] \cup [(B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})]$
 $= [(A \cap C \cap \bar{B}) \cup (A \cap C \cap \bar{C})] \cup [(B \cap C \cap \bar{A}) \cup (B \cap C \cap \bar{C})]$
 $= [(A \cap C \cap \bar{B}) \cup \emptyset] \cup [(B \cap C \cap \bar{A}) \cup \emptyset]$
 $= (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

Donc $\boxed{(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)}$ (even d'énoncé ! :))

Rq : on peut raisonner aussi par double inclusion

⑤ On raisonne par double implication

③ si $A \Delta B = B$, mg $A = \emptyset$.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ (*)

Soit $x \in A \cap B$ - Alors $x \in A$ et $x \in B$. Comme $x \in B$, $x \in A \Delta B = B$
 donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Contradiction donc $A \cap B = \emptyset$

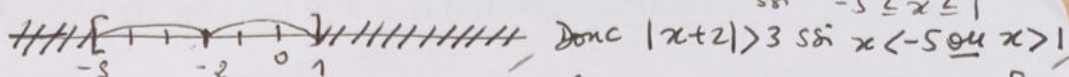
De plus $\emptyset \subset A \cap B$ donc $\emptyset = A \cap B$

- Soit $x \in A \cap \bar{B}$ - Alors $x \in A$ et $x \notin B$. D'après la q2, $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$
 donc $x \in A \Delta B$ or $A \Delta B = B$ donc $x \in B$ - Contradiction donc $A \cap \bar{B} = \emptyset$

Ainsi $A = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ d'après (*).
 • si $A = \emptyset$ alors $A \Delta B = \emptyset \Delta B = (\emptyset \cup B) \setminus (\emptyset \cap B) = B \setminus \emptyset = B$

Concl : $\boxed{A \Delta B = B \Leftrightarrow A = \emptyset}$

1.5
 ①(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ $|x+2| \leq 3$ ssi $|x-(-2)| \leq 3$ ssi $-3 \leq x-(-2) \leq 3$ ssi $-3-2 \leq x \leq 3-2$
 ssi $-5 \leq x \leq 1$



Donc $|x+2| > 3$ ssi $x < -5$ ou $x > 1$

(Soit $M(x)$. $|x+2| \leq 3$ ssi $AM \leq 3$ où $A(-2)$). Concl: $S =]-\infty, -5[\cup]1, +\infty[$

1.5
 ①(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$ ssi $2 \leq \sqrt{x^2+1} < 3$,

$$\begin{aligned} & \text{ssi } 4 \leq x^2+1 < 9 \text{ ssi } 3 \leq x^2 < 8, \\ & \text{ssi } \sqrt{3} \leq \sqrt{x^2} < \sqrt{8} \text{ ssi } \sqrt{3} \leq |x| < 2\sqrt{2} \\ & \text{ssi } -2\sqrt{2} < x \leq -\sqrt{3} \text{ ou } \sqrt{3} \leq x < 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

car $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Ainsi $S =]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[$.

2.5
 ②(a) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $z = a+ib$. Alors $z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.
 z^2 est imaginaire pur ssi $a^2 - b^2 = 0$, ssi $(a-b)(a+b) = 0$ ssi $a=b$ ou $a=-b$.
 L'ensemble des points $M(z)$ est donc la réunion des 2 droites d'équation
 $y=x$ et $y=-x$, (les deux bissectrices : la première et la deuxième).

②(b) Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. (P)

$|z'| = |(1+i)z - 1+3i| = |(1+i)(z + \frac{-1+3i}{1+i})| = |1+i| |z + (1+2i)|$

car $\frac{-1+3i}{1+i} = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i+3i+3}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$ d'une part

et d'autre part le module d'un produit est le produit des modules.

1.5
 Donc $|z'| = |1+i| |z - (-1-2i)| = \sqrt{2} |z - (-1-2i)|$

Ainsi $|z'| = 3$ ssi $|z - (-1-2i)| = \frac{3}{\sqrt{2}}$

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 3$ est le cercle de centre $\Omega(-1-2i)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

②(c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $z = x+iy$. (P)
 $|z| = |1-z|$ ssi $|z| = |z-1|$ ssi $M(z)$ appartient à la médiatrice du segment $[OA]$
 où $A(1)$.
 ssi $M(z) \in \Delta$ où Δ a pour équation $x = \frac{1}{2}$.

2.5
 $|z| = |z'|$ ssi $|z| = |z|^2$ ssi $|z|(1-|z|) = 0$, ssi $|z| = 0$ ou $|z| = 1$

ssi $z = 0$ ou $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique,

ssi $x=y=0$ ou $x^2+y^2=1$

Donc $|z| = |1-z| = |z'|$ ssi $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x=y=0 \text{ ou } x^2+y^2=1 \end{cases}$ ssi $x = \frac{1}{2}$ et $x^2+y^2=1$

③ Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ ssi $x = \frac{1}{2}$ et $y^2 = \frac{3}{4}$ ssi $(z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$= (z-z')(\bar{z}-\bar{z}') - (1+z\bar{z})(1+z'\bar{z}') = (z-z')(\bar{z}-\bar{z}') - 1 - z'\bar{z}' - z\bar{z} - z\bar{z}'z'\bar{z}'$

2.5
 $= z\bar{z} - z\bar{z}' - z'\bar{z} + z'\bar{z}' - 1 - z'\bar{z}' - z\bar{z} - z\bar{z}'z'\bar{z}' = -(1+z\bar{z}' + z'\bar{z} + z\bar{z}'z'\bar{z}')$

$= -(z\bar{z}' + 1)(\bar{z}z' + 1) = -|z\bar{z}' + 1|^2 \leq 0$ et il y a égalité lorsque $z = -\frac{1}{z'}$, avec $z' \neq 0$