

DM4 à rendre pour le vendredi 17 novembre

Exercice 1

On considère les trois solutions de l'équation $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$

1. Résoudre cette équation sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. Dans le plan complexe, on considère les trois points ayant ces racines pour affixes. Placer ces points. Prouver que le triangle ainsi obtenu est rectangle isocèle.
3. Trouver les coordonnées de l'isobarycentre de ce triangle (centre de gravité).

Exercice 2

La dernière question est indépendante des précédentes.

1. Ecrire sous forme exponentielle les racines cubiques du nombre complexe $a = 16(1 - i)$.
2. Pour λ nombre réel quelconque, on pose $z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda} = x_\lambda + iy_\lambda$.
 - (a) Calculer les réels x_λ et y_λ en fonction de λ .
 - (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M_λ de coordonnées (x_λ, y_λ) quand λ décrit $[0, 2\pi]$.
3. Montrer que les solutions de l'équation $(z - (1 + i))^3 = a$ sont les affixes de points de $\mathcal{C}$.
4. Résoudre l'équation $z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0$.

Exercice 3

A , B et C sont trois points d'affixes respectives a , b et c . Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Les points A' , B' et C' sont les images de A , B et C par la rotation R . M , N et P sont les milieux respectifs de $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les affixes des points A' , B' , C' , M , N et P en fonction de a , b et c .
3. Vérifier que $e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
4. Calculer les affixes z et z' des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ et vérifier que $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}z$.
5. Déterminer $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ et comparer MN et MP . Que peut-on en déduire pour MNP ?

Exercice 4 (à faire après le cours de lundi)

Reconnaître $f : z \mapsto \frac{1}{2}(1 + e^{i\alpha})z + e^{i\alpha}2$.