Chapitre 7 : Fonctions usuelles

1 Fonctions logarithmes

1.1 Fonction logarithme népérien

Définition 1.

On appelle ***logarithme népérien*** *LA primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *qui s'annule en* 1*. La fonction logarithme népérien est notée* $\ln$*. On a donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Le mot logarithme vient du grec "'logos"' (discours, rapport) et "'arithmos"' (nombre) et le mot népérien vient de John Napier (1550-1617) ou Neper, mathématicien écossais.

Propriété 1 (Premières propriétés).

- $\ln$ *est dérivable (donc continue) sur* $]0, +\infty[$ *avec* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$*. Elle vérifie* $\ln 1 = 0$.
- *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$ *(pusique sa dérivée est strictement positive).*
- *Le signe de* $\ln x$ *est immédiatement fourni par le sens de variation de* $\ln$ *:*
  - $\ln x < 0$ *équivaut à* $0 < x < 1$,
  - $\ln x = 0$ *équivaut à* $x = 1$,
  - $\ln x > 0$ *équivaut à* $1 < x$.
  - *la valeur du nombre dérivé en 1 de la fonction logarithme* ($\ln'(1) = 1$) *conduit aux résultats suivants :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ ou } \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1,$$

$$\ln(1+h) = h + h\phi(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \phi(h) = 0.$$

Propriétés algébriques

Théorème 1.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*, on a*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Remarque 1. *Initialement, Neper, Briggs, Wright et Bürgi ont mis au point les premières tables de logarithmes (et d'antilogarithmes) dans le but de simplifier les calculs, devenus d'une grande complexité avec les travaux d'astronomie, de navigation et de commerce au cours du seizième siècle. L'idée directrice de cette simplification réside dans le remplacement des multiplications par des additions.*

Propriété 2 (Corollaire).

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

1. $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n\ln(a)$

Bijection

Théorème 2.

La fonction ln *est une bijection (strictement croissante) de* $]0;+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie :*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Remarque 2.
— *Autrement dit, pour tout réel* m, *l'équation* $\ln x = m$ *a une solution unique dans* $]0,+\infty[$.
— e *est l'unique réel tel que* $\ln(e) = 1$. e *est appelé base des logarithmes népériens. Avec un ordinateur, on trouve* $e \simeq 2,718281828459045...$. *De plus, la tangente à la courbe de* ln *au point d'abscisse* e *passe par l'origine.*

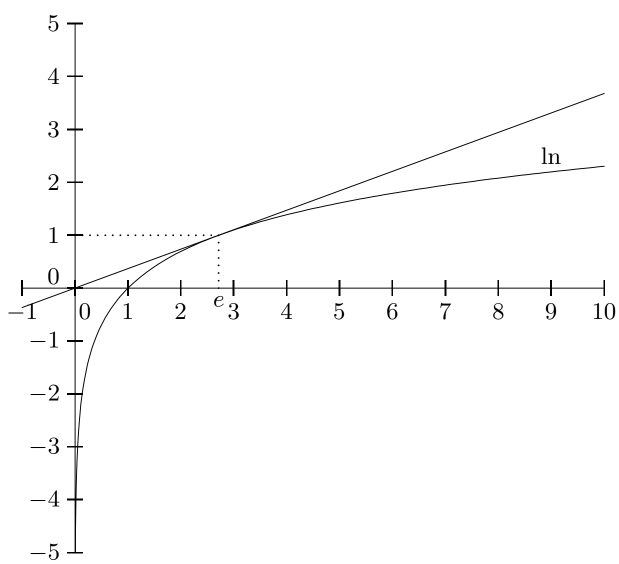
Limites

Propriété 3.

1. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$: *la courbe représentative de* ln *admet l'axe* (Oy) *comme asymptote.*
2. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: *la courbe représentative de* ln *admet une branche parabolique de direction* (Ox).

Remarque 3 (Croissance lente)**.** *Le comportement asymptotique de* ln *peut se traduire ainsi : la courbe finit par s'élever au dessus de toute parallèle à* (Ox).

Représentation graphique



1.2 Logarithme en base 10

Définition 2.

On appelle <u>*logarithme en base* 10</u> *ou logarithme décimal la fonction*

$$\log_{10} \ : \ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Propriété 4.

De la même façon que ln, *la fonction* $\log_{10}$ *vérifie :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \log_{10}(xy) = \log_{10}(x) + \log_{10}(y)$ *et* $\log_{10}(\frac{x}{y}) = \log_{10}(x) - \log_{10}(y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \log_{10}(x^n) = n \log_{10}(x)$
3. $\log_{10}$ *est une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.
4. *La courbe représentative de la fonction* $\log_{10}$ *admet les mêmes branches infinies que la courbe représentative de* ln.

Applications : diagramme de Bode et calculs de pH.

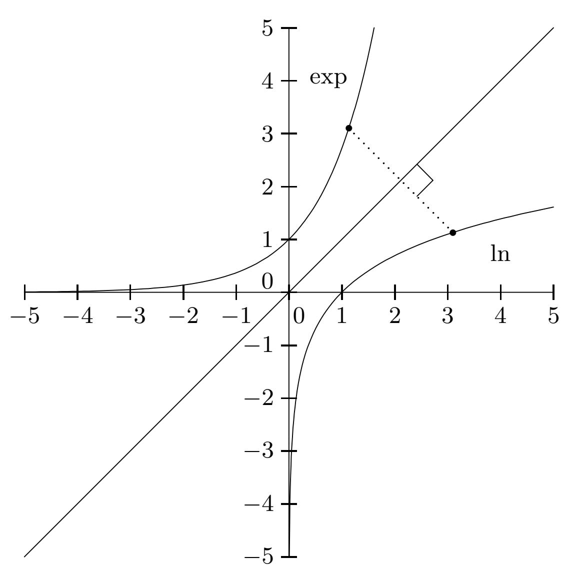
2 Exponentielle

Définition 3.

La fonction exponentielle, notée exp, *est la bijection réciproque de la fonction* ln. *Ainsi :*
$(y = \exp(x)$ *et* $x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (x = \ln y$ *et* $y > 0)$.

Remarque 4 (Conséquences immédiates).
- exp *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout réel* x, $\exp(x) > 0$.
- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$, $\exp(-1) = \frac{1}{e}$ *car* $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ *et* $\ln \frac{1}{e} = -1$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}, \ \ln(\exp(x)) = x$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*, \ \exp(\ln(x)) = x$.
- *Les graphes de* ln *et de* exp *sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation* $y = x$.

Représentation graphique



La conservation du contact par une réflexion a pour conséquence que la tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point de coordonnées $(1,0)$ (de pente 1) a pour image la tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ au point de coordonnées $(0,1)$ (donc de pente 1). Ceci montre que exp est dérivable en 0 avec $\exp'(0) = 1$.

Propriétés algébriques

Propriété 5.

La fonction exp *vérifie :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *et* $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$

Démonstration : deux réels strictement positifs sont égaux si et seulement s'ils ont même logarithme.

Dérivée

Propriété 6.

La fonction exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* exp*, c'est-à-dire elle-même.*

Propriété 7.

La valeur du nombre dérivé en 0 de la fonction exp *conduit aux résultats suivants :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1,$$

$$\exp(h) = 1 + h + h\phi(h), \ \textit{avec} \ \lim_{h\to 0}\phi(h) = 0.$$

Limites

Propriété 8.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *: la courbe représentative de* exp *admet l'axe* (Ox) *comme asymptote.*
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$ *: la courbe représentative de* exp *admet une branche parabolique de direction* (Oy)*. La croissance exponentielle est rapide.*

Notation e^x Pour tout entier relatif n, $\exp(n) = e^n$ car $\exp(n) = \exp(n\times 1) = (\exp(1))^n = e^n$. De plus, pour des raisons analogues, $\exp\dfrac{1}{n} = e^{\frac{1}{n}}$.
Par convention, on pose $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x. Cette convention est légitime car elle prolonge à tout réel x les égalités obtenues précédemment et que les propriétés algébriques, reformulées avec cette notation, produisent des formules conformes à la notation "'puissance"' :

Propriété 9.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x.e^y$ *et* $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$

Puissance d'un nombre positif

Définition 4.

Pour tout réel a strictement positif et tout réel b, on pose

$$a^b = \exp(b\ln(a)) = e^{b\ln(a)}.$$

a^b se lit a puissance b.

Remarque 5. *Cette définition est cohérente avec les notations "'puissance"' qui s'introduisent sans référence à l'exponentielle, comme a^n ($n \in \mathbb{Z}$) puisque a^n et $e^{n\ln a}$, ayant même logarithme, sont égaux, ou $a^{\frac{1}{n}}$, ($n \in \mathbb{Z}^*$). Cette extension donne un sens à des expressions telles que $3^{1.8}$, $51^{-\sqrt{2}}$ ou π^e, mais elle exige que $a > 0$.*

Propriété 10 (Règles de calcul).

Soit $a, a' \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $a^b \times a'^b = (aa')^b$
2. $a^b a^c = a^{b+c}$
3. $(a^b)^c = a^{bc}$

3 Fonctions puissances

Définition
Définition 5.

*Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance d'exposant** a la fonction*

$$f_a \;:\; \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\; x \mapsto x^a = e^{a\ln(x)}$$

Remarque 6. *On a toujours $1^a = 1$, quelque soit $a \in \mathbb{R}$.*

Dérivée - Variations Soit $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 11 (Dérivée).

La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_a{}'(x) = ax^{a-1}$$

Remarque 7. *Ceci signifie que $f_a' = af_{a-1}$. Puisque f_{a-1} est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de f_a' est le signe de a*

Propriété 12 (Variations).

- *Si $a > 0$, alors f_a est strictement croissante.*
- *Si $a = 0$, alors f_a est constante et égale à 1.*
- *Si $a < 0$, alors f_a est strictement décroissante.*

Branches infinies

Propriété 13.

— *Si* $a > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} a\ln x = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$. *Ainsi,* f_a *admet en* 0 *un* *prolongement continu* *en posant* $f_a(0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} a\ln x = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$. *Or* $\dfrac{f_a(x)}{x} = x^{a-1} = e^{(a-1)\ln x}$.

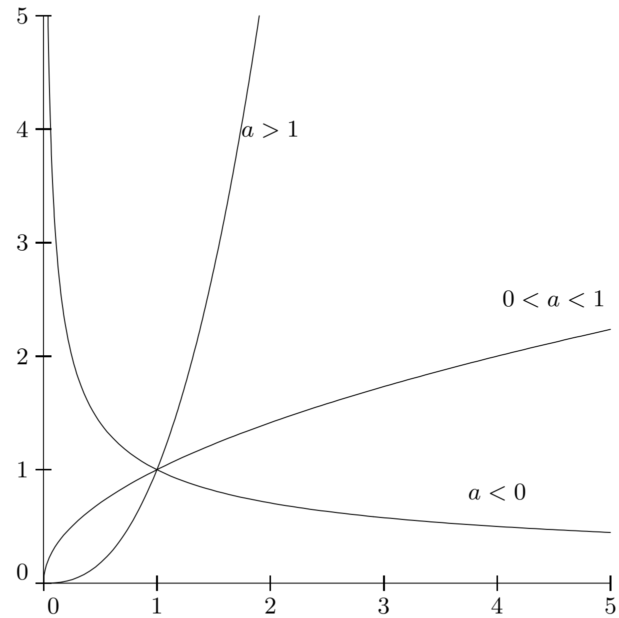
— *si* $0 < a < 1$*, la courbe représentative de* f_a *admet une branche parabolique de direction* (Ox).

— *si* $a > 1$*, la courbe représentative de* f_a *admet une branche parabolique de direction* (Oy).

— *Si* $a < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} a\ln x = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$. *Donc la courbe représentative de* f_a *admet pour asymptote l'axe* (Oy).

$\lim\limits_{x\to+\infty} a\ln x = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$. *Donc la courbe représentative de* f_a *admet pour asymptote l'axe* (Ox).

Représentation graphique Si l'on exclut les cas $a = 0$ (la représentation graphique de f_0 est la droite d'équation $y = 1$) et $a = 1$ (la représentation graphique de f_1 est la droite d'équation $y = x$), il reste trois allures de courbes que l'on mémorise facilement avec les exemples "'types"'. Il faut distinguer "'$a < 0$"' (type $\dfrac{1}{x}$), "'$0 < a < 1$"' (type $\sqrt{x}$) et "'$a > 1$"' (type x^2).



Remarque 8. *On retiendra que :*

— *Si* $a = 0$*, la fonction* f_a *se prolonge sur* $\mathbb{R}_+$ *en posant* $f_a(0) = 1$ *en une fonction constante et égale à 1.*

— *Si* $0 < a < 1$*, la fonction* f_a *se prolonge sur* $\mathbb{R}_+$ *en posant* $f_a(0) = 0$ *en une fonction continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *mais non dérivable en 0.*

— *Si* $a = 1$*, la fonction* f_a *se prolonge sur* $\mathbb{R}_+$ *en posant* $f_a(0) = 0$ *en une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et dont la dérivée en 0 vaut 1.*

— *Si* $a > 1$*, la fonction* f_a *se prolonge sur* $\mathbb{R}_+$ *en posant* $f_a(0) = 0$ *en une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et dont la dérivée en 0 vaut 0.*

— *Si* $a < 0$*, la fonction* f_a *ne peut pas se prolonger en une fonction continue sur* $\mathbb{R}_+$.

Remarque 9. *Soit* $\mathcal{C}_a$ *la courbe représentative de* $x \mapsto x^a$. $\mathcal{C}_a$ *et* $\mathcal{C}_{\frac{1}{a}}$ *sont symétriques par rapport à la première bissectrice car* $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (x^a)^{\frac{1}{a}} = (x^{\frac{1}{a}})^a = x$.

Propriété 14 (Concavité).

Si $a \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $x \mapsto x^a$ *est convexe.*
Si $a \in]0, 1[$, $x \mapsto x^a$ *est concave.*
Si $a = 0$ *ou* $a = 1$, $x \mapsto x^a$ *est une fonction affine (à la fois convexe et concave, courbe rectiligne).*

4 Croissances comparées

Propriété 15.

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^b}{x^a} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0+} x^a |\ln(x)|^b = 0$

Propriété 16.

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)^b}{x^a} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a (e^x)^b = 0$

Ces résultats généralisent les résultats obtenus pour $a = b = 1$ (cas $x \to +\infty$).
Ces résultats sont d'autant plus spectaculaires que a est proche de 0 pour $\dfrac{\ln(x)^b}{x^a}$ et grand pour $\dfrac{(e^x)^b}{x^a}$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{0.001}} = 0$ ou, en élevant à la puissance mille, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{1000}}{x} = 0$.
On peut visualiser ainsi la hierarchie du comportement à l'infini :

$$\sqrt{\ln x} \quad \ln x \quad (\ln x)^{20} \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad x^{100} \quad 2^x \quad e^x \quad 10^x$$

5 Fonctions circulaires réciproques

5.1 Fonctions circulaires

Les fonctions sin et cos sont toutes les deux des surjections de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$. On peut restreindre le domaine d'étude pour obtenir des bijections.

Propriété 17.

$\cos_{|[0,\pi]}$ *est une bijection strictement décroissante de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$.
$\sin_{|[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ *est une bijection strictement croissante de* $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1, 1]$.
Enfin, $\tan_{|]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ *est une bijection strictement croissante de* $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ *sur* $\mathbb{R}$.

5.2 Fonctions circulaires réciproques

Définition 6.

On appelle Arcsinus et on note arcsin *la fonction réciproque de* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.
On appelle Arccosinus et on note arccos *la fonction réciproque de* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Enfin, on appelle Arctangente et on note arctan *la fonction réciproque de* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Remarque 10. *On a donc, pour tout* $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$, *et pour tout* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

Mais attention, on n'a pas : $\forall x \in \mathbb{R}, \arcsin(\sin(x)) = x$. *Par exemple,* $\arcsin(\sin(\frac{2\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$. *En fait,*

$$\arcsin(\sin(x)) = x \iff x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

De même, pour tout $x \in [-1, 1]$ *on a* $\cos(\arccos(x)) = x$ *mais*

$$\arccos(\cos(x)) = x \iff x \in [0, \pi]$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\tan(\arctan(x)) = x$ *mais*

$$\arctan(\tan(x)) = x \iff x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Propriété 18.

On a :
- arcsin *est une bijection strictement croissante de* $[-1, 1]$ *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- arccos *est une bijection strictement décroissante de* $[-1, 1]$ *sur* $[0, \pi]$.
- arctan *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Propriété 19.

Les fonctions arcsin *et* arctan *sont impaires.*
arccos *n'est ni paire, ni impaire, mais pour tout* $x \in [-1, 1]$, *on a* $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

Remarque 11. *La courbe représentative de* arccos *est donc symétrique par rapport au point de coordonnées* $(0, \frac{\pi}{2})$.

Propriété 20.

$$\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad et \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

La courbe représentative de arctan *admet la droite d'équation* $y = \frac{\pi}{2}$ *comme asymptote en* $+\infty$ *et celle d'équation* $y = -\frac{\pi}{2}$ *comme asymptote en* $-\infty$

Propriété 21.

1. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$ *:* $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
2. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$ *:* $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

Propriété 22.

$\forall x \in [-1,1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Propriété 23.

On a :

- *Les fonctions* arcsin *et* arccos *sont dérivables sur* $]-1,1[$, *et pour tout* $x \in]-1,1[$ *:*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De plus, en 1 et en -1, les graphes de arcsin *et de* arccos *présentent une tangente verticale.*

- *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Remarque 12 (Primitives).

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin + K = -\arccos + K'$, $K \in \mathbb{R}$ *et* $K' = \dfrac{\pi}{2} + K$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Remarque 13 (Limites qui découlent du nombre dérivé en 0).

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, *ce qui s'écrit aussi* $\arcsin x = x + x\epsilon(x)$, *avec* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$, *ce qui s'écrit aussi* $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - x + x\epsilon(x)$, *avec* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, *ce qui s'écrit aussi* $\arctan x = x + x\epsilon(x)$, *avec* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

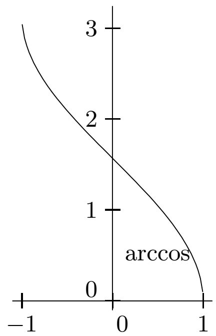
Propriété 24.

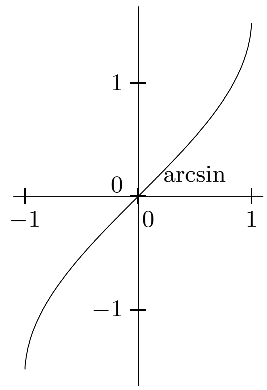
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, *on a*

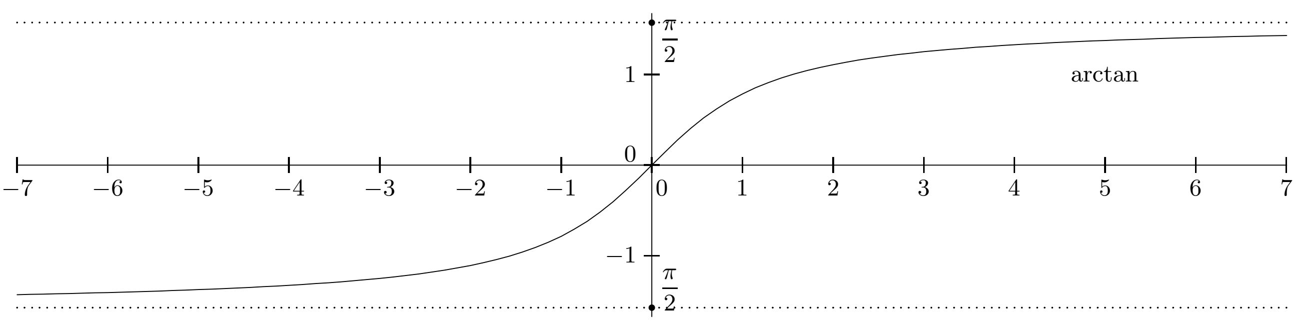
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = sgn(x)\frac{\pi}{2}$$

(où $sgn(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* $sgn(x) = -1$ *si* $x < 0$*)*

Représentations graphiques







6 Fonctions hyperboliques

Une des méthodes pour construire de nouvelles fonctions consiste à utiliser la partie paire et la partie impaire d'une fonction donnée. En effet, dans le chapitre 1, on a montré en raisonnant par analyse-synthèse que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire i ($\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$). p est appelée partie paire de f et i partie impaire de f.
A partir de l'exponentielle, nous allons construire des fonctions ayant des propriétés analogues à celles des fonctions cos et sin : on appelle cosinus hyperbolique (ch) la partie paire de la fonction exponentielle et sinus hyperbolique (sh) la partie impaire de la fonction exponentielle.

6.1 Définition

Définition 7.

On appelle ***sinus hyperbolique*** *la fonction*

$$\mathrm{sh} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et ***cosinus hyperbolique*** *la fonction*

$$\mathrm{ch} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Comme ch *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$, *on peut aussi définir la* ***tangente hyperbolique*** *par la fonction*

$$\mathrm{th} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Remarque 14. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{th}x = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Propriété 25.

ch *est paire,* sh *et* th *sont impaires. De plus, ces trois fonctions sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \ \textit{et} \ \mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \ \textit{et} \ \mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$$

Remarque 15. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x} > 0$ *donc la courbe représentative de* ch *est toujours au dessus de celle de* sh. *De plus,* $e^{-x} \to_{x \to +\infty} 0$ *donc les courbes représentatives de* ch *et* sh *sont asymptotes en* $+\infty$. *Sur* $\mathbb{R}_+^*$, *la courbe représentative de* sh *est au dessus de celle de* th *(étudier pour cela le signe de* $\mathrm{sh}x - \mathrm{th}x$*).*

Propriété 26 (Branches infinies).

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}x}{x} = +\infty$. *La courbe représentative de* sh *admet une branche parabolique de direction asymptotique* (Oy) *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.
$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{ch}x}{x} = +\infty$. *La courbe représentative de* ch *admet une branche parabolique de direction asymptotique* (Oy) *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.
La courbe représentative de th *admet la droite d'équation* $y = 1$ *comme asymptote en* $+\infty$ *et la droite d'équation* $y = -1$ *comme asymptote en* $-\infty$.

Propriété 27 (Concavité).

sh *est convexe sur* $\mathbb{R}^+$ *et concave sur* $\mathbb{R}^-$. ch *est convexe sur* $\mathbb{R}$. th *est concave sur* $\mathbb{R}^+$ *et convexe sur* $\mathbb{R}^-$.

Propriété 28.

sh *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$, ch *n'est pas bijective sur* $\mathbb{R}$ *mais sa restriction à* $\mathbb{R}_+$ *est une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $[1, +\infty[$ *et* th *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1, 1[$.

6.2 Limites liées au nombre dérivé en 0 de sh, ch et th

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sh}x}{x} = 1$, ce que l'on écrit aussi : $\mathrm{sh}x = x + x\epsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$
$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ch}x - 1}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ch}x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, ce que l'on écrit aussi : $\text{ch}x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{th}x}{x} = \dfrac{1}{\text{ch}^2 0} = 1$, ce que l'on écrit aussi : $\text{th}x = x + x\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$

6.3 Représentation graphique :

On a les tableaux de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

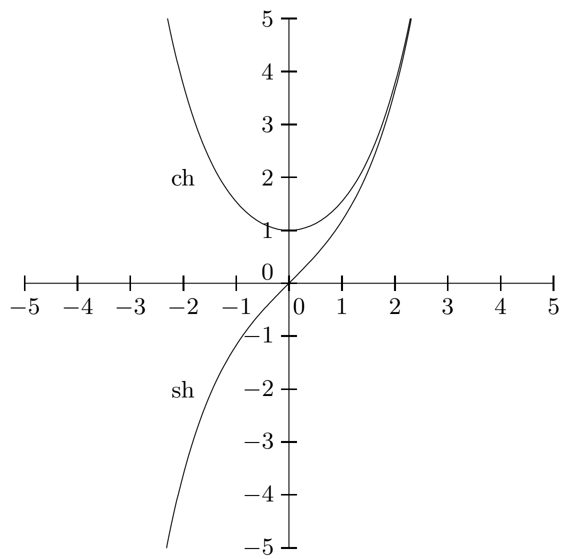
et

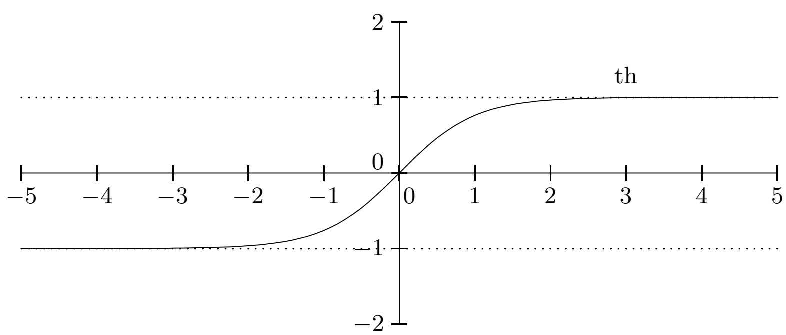
x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

et

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1	0	1

et les représentations graphiques correspondantes :





6.4 Trigonométrie hyperbolique

Propriété 29.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

7 Pour aller plus loin

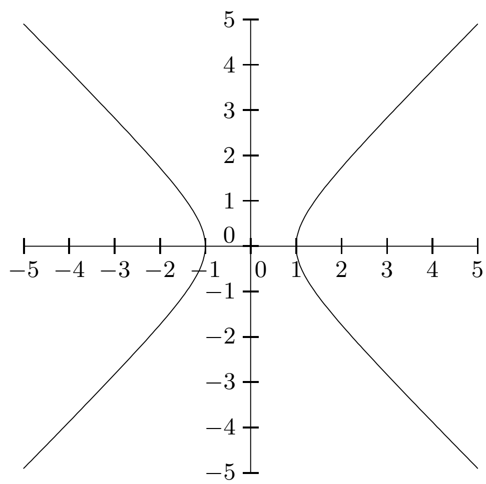
Interprétation géométrique :

Considérons l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$: Cette hyperbole est composée de deux branches :
— la branche de droite ($x \geq 1$) de l'hyperbole peut être parametrée par

$$\begin{cases} x = \mathrm{ch}(t) \\ y = \mathrm{sh}(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

— et la branche gauche ($x \leq -1$) peut être parametrée par

$$\begin{cases} x = -\mathrm{ch}(t) \\ y = \mathrm{sh}(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



Propriété 30 (Formules d'addition).

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$
2. $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$
3. $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$
4. $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$

Propriété 31.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
— $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = 1 + 2\mathrm{sh}^2(x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1$
— $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)$

Remarque 16. *On peut déduire toute la trigonométrie hyperbolique à partir de la trigonométrie circulaire par la méthode suivante :*
— *on remplace tout angle x par ix*
— *on remplace $\cos(ix)$ par $\mathrm{ch}x$, $\sin(ix)$ par $i\mathrm{sh}x$.*

Exemple : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
$\cos(i(a+b)) = \cos ia \cos ib - \sin ia \sin ib$,
$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{cha}\mathrm{ch}b - i^2\mathrm{sha}\mathrm{ch}b$, *d'où*
$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{cha}\mathrm{ch}b + \mathrm{sha}\mathrm{ch}b$.