

TD 6 : Complexes

► Exercice 1 :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos x - \sin x = 1$,
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x < \sqrt{3}$.

► Exercice 2 : Résoudre l'équation $iz^2 + 4(2+i)z + 3i + 8 = 0$, d'inconnue complexe z .

► Exercice 3 : Résoudre l'équation $z^5 = 1$, d'inconnue complexe z . En déduire les solutions de l'équation $z^5 = -4-4i$ et représenter leurs images dans le plan complexe.

► Exercice 4 : Résoudre l'équation $z^3 + (4i-2)z^2 + (8i-11)z - 4(16+11i)$, d'inconnue complexe z , sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

► Exercice 5 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue complexe z : $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$ et $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

► Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, $z^6 = 8i$, $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$.

► Exercice 7 : Montrer que le polynôme $x^4 + 1$ se factorise sur l'ensemble des nombres réels en produit de deux polynômes du second degré.

► Exercice 8 :

1. Enumérer toutes les racines septièmes de 1.
2. Soit ω une racine septième de 1. Calculer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$ (on distinguera deux cas).
3. Si $\omega \neq 1$, calculer $\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

► Exercice 9 : A tout complexe $z \neq 2$, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z+i}{z-2}$. On définit les parties de $\mathbb{C}$, Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 par $z \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |Z| = 1$, $z \in \Gamma_2 \Leftrightarrow Z$ réel, $z \in \Gamma_3 \Leftrightarrow Z$ imaginaire pur et $z \in \Gamma_4 \Leftrightarrow \arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. Représenter graphiquement Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 .

► Exercice 10 : Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que le triangle dont les sommets A , B et C ont pour affixes a , ja et j^2a est équilatéral. On pourra par exemple considérer la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

► Exercice 11 : On considère l'équation complexe $E : z^3 + 6z^2 + 12z + 9 = 0$. On appelle z_1 , z_2 et z_3 les racines de E telles que $\operatorname{Im}(z_1) = 0$, $\operatorname{Im}(z_2) > 0$ et $\operatorname{Im}(z_3) < 0$. On note M_1 , M_2 et M_3 leurs images respectives. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1. -3 est solution de E ,
2. les points M_1 , M_2 et M_3 forment un triangle rectangle,
3. le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$ est le point d'affixe 4,
4. $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$,
5. $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

► Exercice 12 : Soit $ABCD$ un carré direct de centre O , origine du repère et soit a l'affixe du point A .

1. Déterminer en fonction de a les affixes des points B , C et D .

2. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et t' est la translation de vecteur $-\overrightarrow{OA}$. E est l'image de D par t et F est l'image de D par t' . Déterminer les affixes de E et F .
3. Montrer que $BE = AF$ et que (BE) est perpendiculaire à (AF) .

► Exercice 13 : Dans chaque cas, identifier la transformation plane d'écriture complexe $z \mapsto z'$ et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent.

1. $z' = z + i$
2. $z' = 2z + 1 - i$
3. $z' = -z + 2(1 - i)$
4. $z' = -iz + 1$
5. $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$

► Exercice 14 : Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sens direct $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$ et I le milieu de $[BC]$. Soit S la transformation $R_C \circ T \circ R_B$, où $R_C = r\left(C, \frac{\pi}{2}\right)$, $R_B = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right)$ et $T = t_{\overrightarrow{BC}}$. On rapporte le plan au repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Donner l'écriture complexe des transformations R_C , T et R_B .
2. Caractériser alors S .