TD 5 cor

Ex1 • $\cos x - \sin x = \overset{a}{1}\cos x + \overset{b}{(-1)}\sin x$. On forme le nombre complexe $a+ib$ $= 1 - 1i$

or $1 - 1i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Donc $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Résolvons l'équation $\cos x - \sin x = 1$ ssi $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

ssi $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ssi $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

ssi $x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $x + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

ssi $x \equiv 0\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

• $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 3\cos x + (-\sqrt{3})\sin x$

or $3 - \sqrt{3}i = \sqrt{12}\left(\frac{3}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}i\right) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{3}\, e^{-\frac{i\pi}{6}}$

donc $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos\left(x - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Ex2 $iz^2 + 4(2+i)z + 3i + 8 = 0$ ici $a = i$ $b = 4(2+i)$ $c = 3i + 8$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16(2+i)^2 - 4 \times i \times (3i+8) = 16(4 + 4i - 1) - 12i^2 - 32i$

$= 48 + 64i + 12 - 32i = 60 + 32i = 4(15 + 8i)$

Cherchons les racines carrées de $15 + 8i$, c'est-à-dire résolvons le système $\begin{cases}(a+ib)^2 = 15 + 8i \\ a^2 + b^2 = \sqrt{15^2 + 8^2}\end{cases}$ Ce système est

équivalent à $\begin{cases} a^2 - b^2 = 15 \\ 2aib = 8i \\ a^2 + b^2 = 17\end{cases}$ ssi $\begin{cases} 2a^2 = 32 \\ 2b^2 = 2 \\ ab = 4\end{cases}$ ssi $\begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 1 \\ ab = 4\end{cases}$

Les racines carrées de $15 + 8i$ sont $4 + i$ et $-4 - i$

Les racines carrées de $4(15+8i)$ sont $2(4+i)$ et $-2(4+i)$.

Les solutions de l'équation sont : $\frac{-4(2+i) + 2(4+i)}{2i} = \frac{\cancel{-8} - 4i \cancel{+8} + 2i}{2i}$

et $\frac{-4(2+i) - 2(4+i)}{2i} = \frac{-8 - 4i - 8 - 2i}{2i} = \frac{-16 - 6i}{2i} = -i(-8 - 3i) = -3 + 8i$

Donc $S = \{-3 + 8i, -1\}$

TD5 cor

Ex 3 $S = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{-\frac{4i\pi}{5}}, e^{-\frac{2i\pi}{5}} \right\}$ est l'ensemble des solutions de l'éq $z^5 = 1$.

$-4-4i = \sqrt{32}\left(\frac{-4}{\sqrt{32}} - \frac{4}{\sqrt{32}} i\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{-4}{4\sqrt{2}} - \frac{4}{4\sqrt{2}} i\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$= 4\sqrt{2} \quad e^{\frac{5i\pi}{4}}$

Une racine cinquième de $-4-4i$ est $\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$

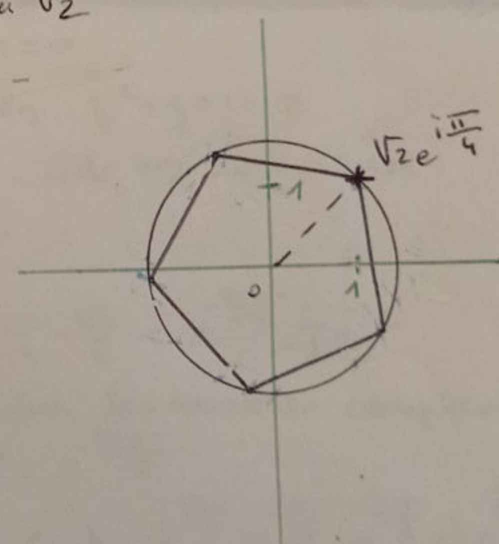
Les solutions de l'éq $z^5 = -4-4i$ sont donc :

$\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \times e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-\frac{4i\pi}{5}}$ et $\sqrt[5]{4\sqrt{2}}\, e^{-\frac{2i\pi}{5}}$, soit :

$\underbrace{\sqrt[10]{32}}_{=\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\sqrt[10]{32}\, e^{\frac{13i\pi}{20}}$, $\sqrt[10]{32}\, e^{\frac{21i\pi}{20}}$, $\sqrt[10]{32}\, e^{i\frac{29\pi}{20}}$, $\sqrt[10]{32}\, e^{i\frac{37\pi}{20}}$

NB : $\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} = 1+i$

Les solutions forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$



Ex 5 : Soit $z \in \mathbb{C}$

• $(3z^2+z+1)^2 + (z^2+2z+2)^2 = 0$

ssi $(3z^2+z+1)^2 - (iz^2+2iz+2i)^2 = 0$

ssi $[3z^2+z+1-iz^2-2iz-2i][3z^2+z+1+iz^2+2iz+2i] = 0$

ssi $[(3-i)z^2+(1-2i)z+(1-2i)][(3+i)z^2+z(1+2i)+(1+2i)] = 0$.

ssi $(3-i)z^2+(1-2i)z+(1-2i) = 0$ ou $(3+i)z^2+z(1+2i)+(1+2i) = 0$

$\Delta = (1-2i)^2 - 4(3-i)(1-2i)$
$= 1-4-4i-4(3-6i-i-2)$
$= -3-4i-12+24i+4i+8$
$= -7+24i$

$\Delta' = (1+2i)^2 - 4\times(3+i)(1+2i)$
$= -7-24i = \overline{\Delta}$

Les racines de Δ' sont $3-4i$ et $-3+4i$.

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tq

$\begin{cases} a^2-b^2 = -7 \\ 2iab = 24i \\ a^2+b^2 = \sqrt{7^2+24^2} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a^2-b^2 = -7 \\ ab = 12 \\ a^2+b^2 = 25 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 32 \\ ab = 12 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 4 \\ ab > 0 \end{cases}$

exemple de calcul

$\dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{-1+2i+3+4i}{2(3-i)}$

$= \dfrac{2+6i}{2(3-i)} = \dfrac{2(1+3i)(3+i)}{2(3-i)(3+i)} = \dfrac{10i}{10} = i$

Les racines carrées de Δ sont $3+4i$ et $-3-4i$

Les solutions de l'éq sont : $i, -i, -\frac{1+i}{2}$ et $-\frac{1-i}{2}$ (faire les calculs) $\hookrightarrow \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ et $\dfrac{-b' \pm \delta'}{2a'}$

• Soit $z \in \mathbb{C}$ $\quad z^6 + z^3 + 1 = 0$

ssi $(z^3)^2 + z^3 + 1 = 0$

Commençons par résoudre l'éq $z^2+z+1 = 0$

$\Delta = 1 - 4\times1\times1 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Cette équation a 2 sol :

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

Or $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ et $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j} = j^2$

Il faut maintenant déterminer les nombres complexes vérifiant $z^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $z^3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

les solutions de $z^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ sont : $e^{\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{9}} \times e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{9}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}}$

les solutions de $z^3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sont : $e^{-\frac{2i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{9}} \times e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}}$

Finalement,

$S = \left\{ e^{\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{8i\pi}{9}}, e^{\frac{14i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{4i\pi}{9}}, e^{\frac{10i\pi}{9}} \right\}$

Ex 12

① On note b, c et d les affixes des points A, B, C et D

$B = r(A)$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

donc $b - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-0) \Rightarrow b = ia$

De même $C = r(B)$ donc $c = ib = i^2 a = -a$

et $D = r(C)$ donc $d = ic = -ia$

② On note e et f les affixes des points E et F

$E = t(D) \Rightarrow e = d + a = -ia + a = a(1-i)$ car $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe $a - 0 = a$

$F = t'(D) \Rightarrow f = d - a = -ia - a = -a(1+i)$ car $-\overrightarrow{OA}$ a pour affixe $-a$

③ $BE = |e-b| = |a(1-i) - ia| = |a - ia - ia| = |a(1-2i)| = |a|\,|1-2i|$

$AF = |f-a| = |-a(1+i) - a| = |-a(2+i)| = |-a|\,|2+i| = |a|\,|2+i|$

or $|1-2i| = \sqrt{1+4} = |2+i|$ donc $BE = AF$.

Déterminons $\frac{f-a}{e-b}$.

$$\frac{f-a}{e-b} = \frac{-a(2+i)}{a(1-2i)} = \frac{-(2+i)}{1-2i} = \frac{-(2+i)(1+2i)}{1+4} = \frac{-5i}{5} = -i \in i\mathbb{R}^*$$

donc $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AF}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ donc $(BE) \perp (AF)$.

Ex 13

① translation de vecteur $\vec{u}(i)$

② homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(i-1)$

Pour trouver le centre, chercher ω tq $\omega = 2\omega + 1 - i$ (point fixe)

ssi $\omega = -1 + i$

③ rotation angle π centre $\Omega(1-i)$ (c'est une symétrie centrale)

Pour trouver le centre, chercher ω tq $\omega = -\omega + 2(1-i)$

ssi $\omega = 1 - i$

Pour trouver un angle, voir que $-1 = e^{i\pi}$

④ rotation angle $-\frac{\pi}{2}$ centre $\Omega\left(\frac{1-i}{2}\right)$

$\omega = -i\omega + i$ ssi $\omega = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$

et $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}}$

$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,\omega$ ssi $\omega\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 0$ ssi $\omega = 0$

rotation angle $\frac{\pi}{4}$ centre $O(0)$.

Ex 14 Dans $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$, $\vec{AB}$ a pour affixe 1 et $\vec{AC}$ a pour affixe i donc B a pour affixe 1 et C a pour affixe i

(1) R_B a pour écriture complexe : $z'-1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1) = i(z-1)$

donc $z' = i(z-1)+1$

T a pour écriture complexe : $z' = z+i-1$ puisque $\vec{BC}(i-1)$

R_C a pour écriture complexe : $z'-i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-i) = i(z-i)$

donc $z' = i(z-i)+i$.

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
R_C \circ T \circ R_B(z) &= R_C \circ T(R_B(z)) = R_C \circ T(i(z-1)+1) \\
&= R_C(T(i(z-1)+1)) \\
&= R_C(i(z-1)\cancel{+1}+i\cancel{-1}) \\
&= R_C(iz-i+i) = R_C(iz) \\
&= i(iz-i)+i = i^2 z - i^2 + i = -z+1+i
\end{aligned}$$

l'écriture complexe de S est $z' = -z+1+i$

Il s'agit de la rotation d'angle π et de centre $\Omega\left(\frac{1+i}{2}\right)$

puisque l'équation $\omega = -\omega+1+i$ a pour solution $\omega = \frac{1+i}{2}$.

S est donc la symétrie centrale de centre $\Omega\left(\frac{1+i}{2}\right)$.