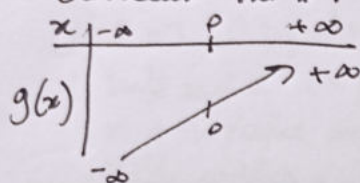


- ① $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f et g également
- ② Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{-x}}{2} = f(x)$ et $g(-x) = \frac{e^{-x} - e^{(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{-x}}{2} = -\frac{e^{-x} - e^{-x}}{2} = -g(x)$
- et $\mathbb{R}$ est centré en 0 donc f est paire et g impaire
- ③ Soit $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$ donc $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ donc $f(x) > 0$
- $$f^2(x) + g^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}]$$
- $$= \frac{1}{4} [2e^{2x} + 2e^{-2x}] = \frac{1}{4} [2(e^{2x} + e^{-2x})] = \frac{1}{4} [2 \cdot 4] = 1$$

- ④ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit par un scalaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \frac{e^x - (-1) \times e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x) > 0$

- ⑤ D'après ③ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) > 0$ et g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



$$g(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

- ⑥ Branche infinie en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \text{ car } g \text{ est impaire.}$$

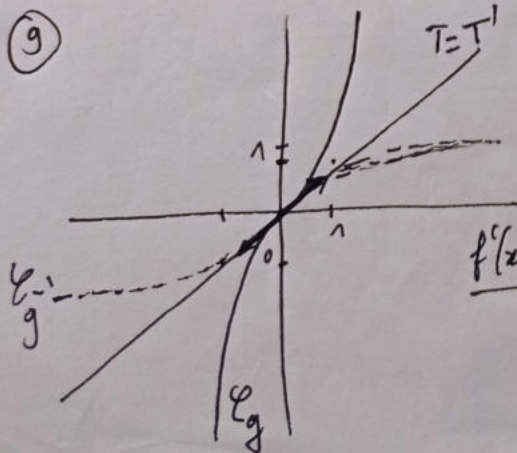
Donc $\mathcal{C}_g$ admet en $\pm\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)

- ⑦ T a pour équation $y = g'(0)(x-0) + g(0) = f(0)x + 0 = \frac{2}{2}x = x$.
- T est donc la 1^{ère} bissectrice.

- ⑧ g est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit par un scalaire de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

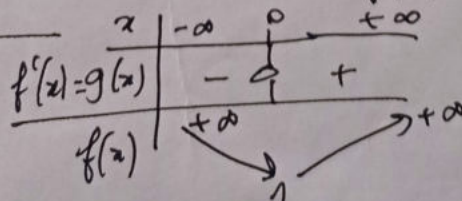
Soit $x \in \mathbb{R}$ $g''(x) = (g')'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = g(x)$. D'après ⑤, $g''(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ et $g''(x) \leq 0$ si $x \leq 0$. Donc g est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave sur $\mathbb{R}^-$

⑨



- ⑩ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit par un scalaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = g(x) \geq 0$ si $x \geq 0$



$$f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ car } f \text{ est impaire}$$

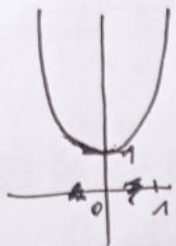
branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$

2/5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times e^{-x}}{x} = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ car } f \text{ paire}$$

Donc f admet en $\pm \infty$ une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)
La tangente à f au point d'abscisse 0 a pour équation $y=1$ car $f'(0)=0$
et $f(0)=1$

f est convexe sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = |f'(x)| = f(x) > 0$.



Partie B

① g est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le th de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= \mathbb{R} = \mathbb{I}$

② $\mathbb{R} = \mathbb{I}$ est symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in \mathbb{I}$ on pose $y = g^{-1}(-x)$. Alors $g(y) = -x$ c-à-d $-g(y) = x$

or g impaire donc $-g(y) = g(-y)$. Ainsi $x = g(-y)$ c-à-d $g^{-1}(x) = -y$

Donc $g^{-1}(x) = -g^{-1}(-x)$ c-à-d $g^{-1}(-x) = -g^{-1}(x)$ concl g^{-1} est impaire

③ Soit $x_0 \in \mathbb{R} \quad g'(x_0) > 0$ d'après A4 donc $g'(x_0) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable

$$\text{en } g(x_0) \text{ et } (g^{-1})'(g(x_0)) = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{f(x_0)}$$

Ainsi g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{I}$ entier.

Soit $y_0 \in \mathbb{I}$, il existe une unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $y_0 = f(x_0)$ et

$$(g^{-1})'(y_0) = (g^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f(g^{-1}(y_0))}$$

$$\text{D'après A-3} \quad f^2(g^{-1}(y_0)) - g^2(g^{-1}(y_0)) = 1, \text{ c-à-d } (f(g^{-1}(y_0)))^2 - (g(g^{-1}(y_0)))^2 = 1$$

$$\text{or } g(g^{-1}(y_0)) = y_0 \text{ donc } (f(g^{-1}(y_0)))^2 = 1 + y_0^2$$

et comme $f(g^{-1}(y_0)) \geq 0$ (voir tableau de variation de f)

$$\text{on a } f(g^{-1}(y_0)) = \sqrt{1 + y_0^2} \text{ d'où le résultat}$$

$$\text{④ } T: y = (g^{-1})'(0)(x-0) + g^{-1}(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}}x + 0 = x \text{ car } g(0)=0 \text{ si } 0=g^{-1}(0).$$

T est la 1^{ère} bissectrice

⑤ voir feuille précédente

⑥ $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \geq 1$ donc $\sqrt{1+x^2}$ existe. Mq $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ puisque $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}_+$

si $x \geq 0$ alors comme $\sqrt{1+x^2} \geq 1, x + \sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$.

si $x < 0$ alors $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| = -x$ donc $\sqrt{1+x^2} + x > 0$

g_1 est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fcts dérivables.

On rappelle que $(\ln v)' = \frac{v'}{v}$ avec ici $v = x + \sqrt{1+x^2}$

$$\text{et } v' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g_1'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \stackrel{(\Delta)}{=} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(7) On a: $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_1'(x) = (g^{-1})'(x)$

Donc g_1 et g^{-1} ont la même dérivée sur $\mathbb{R}$
 Ces 2 fonctions diffèrent donc d'une constante $c \in \mathbb{R}$ (*)

Déterminons c .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_1(x) = g^{-1}(x) + c.$$

En particulier, si $x=0$ alors $g_1(0) = g^{-1}(0) + c$

or $g_1(0) = \ln(0 + \sqrt{1+0^2}) = \ln 1 = 0$ et $g^{-1}(0) = 0$ puisque $0 = g(0)$
 d'après A-5.

$$\text{Ainsi } 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0.$$

Concl: $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_1(x) = g^{-1}(x)$ cà d $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

Explication de (*):

$$g_1' = (g^{-1})' \text{ donc } g_1' - (g^{-1})' = 0 \text{ donc } (g_1 - g^{-1})' = 0$$

donc $g_1 - g^{-1}$ est une fonction constante

$$\text{donc } \exists c \in \mathbb{R} \text{ tq } g_1 - g^{-1} = c$$

On dit que les 2 fonctions g_1 et g^{-1} diffèrent d'une constante

Explication de (Δ):

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} &= \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

car $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1}$

Ex 2 Soit $m > 1$

$$S = \sum_{k=1}^m 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$$

1-a Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{-8i} (e^{ix} - e^{-ix})^3 = \frac{1}{-8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = -\frac{1}{4} (\sin 3x - 3 \sin x) = \boxed{\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x} \end{aligned}$$

$$1-b \quad S = \sum_{k=1}^m 3^k \left[\frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{3^k} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi}{3^k} \right] = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left(3^{k+1} \sin \left(\frac{\pi}{3^k} \right) - 3^k \sin \left(\frac{\pi}{3^{k-1}} \right) \right) \quad \text{somme télescopique}$$

$$S = \frac{1}{4} \left[3^{m+1} \sin \left(\frac{\pi}{3^m} \right) - 3^1 \sin \left(\frac{\pi}{3^0} \right) \right] = \boxed{\frac{3^{m+1}}{4} \sin \left(\frac{\pi}{3^m} \right)} \quad \text{car } \sin \left(\frac{\pi}{3^0} \right) = \sin(\pi) = 0$$

2-a Soit $k \in \mathbb{N}^*$
 f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (les fonctions $\sin$ et $x \mapsto x^3$). On reconnaît KU^m de dérivée $KmU^{m-1}U'$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \quad f'_k(x) = 3^k x 3 \sin^{3-2}\left(\frac{x}{3^k}\right) \times \frac{1}{3^k} \times \cos\left(\frac{x}{3^k}\right) \quad \text{avec } K=3^k, m=3$$

$$U = \sin\left(\frac{x}{3^k}\right)$$

$$\text{et } U' = \frac{1}{3^k} \cos\left(\frac{x}{3^k}\right)$$

$$2-b \quad \int_0^\pi f'_k(x) dx = \left[f_k(x) \right]_0^\pi = f_k(\pi) - f_k(0) = \boxed{3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^k}\right)}$$

$$\text{car } f_k(0) = 3^k \sin^3\left(\frac{0}{3^k}\right) = 0$$

En effet, une primitive de f'_k sur $[0, \pi]$ est par ex f_k .

2-c Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = -\frac{1}{8} (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) (e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= -\frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-ix} + e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = -\frac{1}{4} (\cos 3x - \cos x) = \boxed{\frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 3x}{4}} \end{aligned}$$

$$2-d \quad S = \sum_{k=1}^m \int_0^\pi f'_k(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_0^\pi 3 \sin^2\left(\frac{x}{3^k}\right) \cos\left(\frac{x}{3^k}\right) dx \quad \text{linéarité de l'intégrale}$$

$$= \int_0^\pi \sum_{k=1}^m 3 \sin^2\left(\frac{x}{3^k}\right) \cos\left(\frac{x}{3^k}\right) dx = \frac{3}{4} \int_0^\pi \sum_{k=1}^m \left[\frac{\cos x}{3^k} - \cos\left(\frac{3x}{3^k}\right) \right] dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^\pi \sum_{k=1}^m \left(\cos\left(\frac{x}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right) \right) dx \quad \text{linéarité de la somme et de l'intégrale}$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^\pi \left[\cos \frac{x}{3^m} - \cos\left(\frac{x}{3^0}\right) \right] dx = \frac{3}{4} \int_0^\pi \left(\cos \frac{x}{3^m} - \cos x \right) dx$$

$$= \frac{3}{4} \left[3^m \sin \frac{x}{3^m} - \sin x \right]_0^\pi = \frac{3}{4} \left[3^m \sin \frac{\pi}{3^m} - \sin \pi + 3^m \sin \frac{0}{3^m} + \sin 0 \right]$$

$$= \frac{3}{4} \times 3^m \sin \frac{\pi}{3^m} = \boxed{\frac{3^{m+1}}{4} \sin \left(\frac{\pi}{3^m} \right) = S}$$

on retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode 1

Ex 3.1.a $f \circ g$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en tant que composée de 2 applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ $f \circ g(x) = f(g(x)) = \boxed{\ln(1+e^{-x})}$

1-b Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(x) - f \circ g(x) = \ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x})$
 $= \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x} \frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right)$
 $= \ln\left(e^x \times \frac{1+e^x}{e^x + e^x e^{-x}}\right) = \ln\left(e^x \times \frac{1+e^x}{e^x + 1}\right)$
 $= \ln(e^x) = \boxed{x}$

2-a Soit $x \in [0, 2]$ alors $0 \leq x \leq 2$ donc $0 \leq x^2 \leq 4$

et $0 \leq 3x^2 \leq 12$ donc $1 \leq 3x^2 + 1 \leq 13$ donc $f(x) \in [1, 13]$

Ainsi on a mg $f([0, 2]) \subset [1, 13] = [f(0), f(2)]$

Mg $[1, 13] \subset f([0, 2])$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, que l'on peut appliquer car f est continue sur $[0, 2]$ pour tout $y \in [f(0), f(2)] \exists x \in [0, 2]$ tq $y = f(x)$.

Donc $[1, 13] = [f(0), f(2)] \subset f([0, 2])$

Concl: $\boxed{[1, 13] = f([0, 2])}$

2b: On cherche $f^{-1}([1, 4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 4]\}$

Réolvons l'inéquation double: $1 \leq f(x) \leq 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $1 \leq 3x^2 + 1 \leq 4$

ssi $0 \leq 3x^2 \leq 3$

ssi $0 \leq x^2 \leq 1$ ssi $-1 \leq x \leq 1$ ssi $x \in [-1, 1]$

Concl: $\boxed{f^{-1}([1, 4]) = [-1, 1]}$

3: Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ $\exists m \in \mathbb{N}$, $x = x^m$ En effet il suffit de prendre $m=1$ donc $x R x$ et R est réflexive

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ et $y \in \mathbb{R}_*^+$ tq $x R y$ et $y R x$

alors $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $y = x^m$ et $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $x = y^n$

ainsi $y = x^m = (y^n)^m = y^{nm}$ ssi $y - y^{nm} = 0$ ssi $y(1 - y^{nm-1}) = 0$

ssi ($y=0$ ou $1 = y^{nm-1}$) ssi ($y=0$ ou $\ln 1 = \ln(y^{nm-1})$)

ssi ($y=0$ ou $0 = (nm-1)\ln y$) ssi $y=0$ ou $nm=1$ ou $y=1$

Ainsi soit $nm=1$ et alors $m=n=1$ et donc $y = x^1$ donc $y = x$
 soit $y=1$ et alors $x = 1^m = 1$ donc $x = y$

Concl: A est antisymétrique

6/6

- Soient $x > 0, y > 0, z > 0$ tq xRy et yRz

alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $y = x^n$ $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $z = y^m$

ainsi $z = y^m = (x^n)^m = x^{nm}$

donc il existe $p \in \mathbb{N}$ ($p = n \times m$) tq $z = x^p$ donc xRz
et R est transitive

Concl: R est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus R n'est pas symétrique: par ex $2R4$ mais $4 \not R 2$

Donc R n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$