$-4i$ est une racine du polynome $P(z)=z^3+(4i-2)z^2+(8i-11)z-4(16+11i)$. (le vérifier)

TD6 On peut donc factoriser P par $(z+4i)$.

ex 4 On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P(z)=(z+4i)(az^2+bz+c)$ et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On obtient, en développant puis en identifiant, $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-11+16i \end{cases}$

autre méthode : division euclidienne → travailler cette méthode également

$P(z)=0$ ssi $(z+4i)(z^2-2z-11+16i)=0$

ssi $z+4i=0$ ou $z^2-2z-11+16i=0$

Résolvons l'équation $z^2-2z-11+16i=0$

$\Delta = 4-4(-11+16i) = 4+44-64i$
$= 48-64i$
$= 16(3-4i)$.

On cherche maintenant δ, une racine carrée de Δ.

Cherchons d'abord une racine carrée de $3-4i$ par la méthode algébrique,

ie, on cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tq $(x+iy)^2=3-4i$ ssi $x^2-y^2+2ixy=3-4i$

ssi $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ \mathrm{sgn}(xy)<0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 2x^2=8 \\ 2y^2=2 \\ \mathrm{sgn}(xy)<0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=2 \text{ et } y=-1 \\ \text{ou} \\ x=-2 \text{ et } y=1 \end{cases}$

Les 2 racines carrées de $3-4i$ sont $2-i$ et $-2+i$.

Les 2 racines carrées de Δ sont donc $\sqrt{16}(2-i)$ et $\sqrt{16}(-2+i)$, soit : $8-4i$ et $-8+4i$.

On choisit $\delta = 8-4i$.

Les solutions de $z^2-2z-11+16i=0$ sont $\frac{2+\delta}{2}$ et $\frac{2-\delta}{2}$

$\frac{2+\delta}{2} = \frac{2+8-4i}{2} = 5-2i$ et $\frac{2-\delta}{2} = \frac{2-8+4i}{2} = -3+2i$.

<u>Concl</u> : l'ens des solutions de $P(z)=0$ est : $S=\{-4i, 5-2i, -3+2i\}$