TD 5

ex 4

1 Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, on souhaite montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$, on veut montrer que $x \in f^{-1}(f(A))$, ce qui signifie $f(x) \in f(A)$ (par définition de l'image réciproque). Comme ceci est vrai par définition de l'image directe, $x \in f^{-1}(f(A))$ et on a l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Ainsi $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2 Montrons maintenant l'équivalence demandée. Pour cela, on montre les deux implications.

- Supposons f injective. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, on veut montrer que $A = f^{-1}(f(A))$. On a déjà montré l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$, il reste donc à montrer l'inclusion $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$, donc on a $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme f est injective, $x = a$ et $x \in A$, ce qui montre que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Ainsi, on a $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$.

- Supposons maintenant que $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$. On souhaite montrer que f est injective. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. L'hypothèse porte sur des sous-ensembles de E, il faut donc définir des ensembles A et B en fonction de x et y. La manière la plus simple de faire ceci est de prendre des singletons : on pose $A = \{x\}$. Alors $f(A) = \{f(x)\}$ et

$$f^{-1}(f(A)) = \{t \in E\,;\, f(t) \in f(A)\} = \{t \in E\,;\, f(t) = f(x)\}.$$

Ainsi $y \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$, donc $y = x$ et f est injective.

En conclusion, on a l'équivalence souhaitée.

ex 5

1 Soit $B \in \mathscr{P}(F)$, on souhaite montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$ (par définition de l'image directe). Comme $x \in f^{-1}(B)$, par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B$, donc $y \in B$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Ainsi $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

2 Montrons maintenant l'équivalence demandée. Pour cela, on montre les deux implications.

- Supposons f surjective. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$, on veut montrer que $B = f(f^{-1}(B))$. On a déjà montré l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$, il reste donc à montrer l'inclusion $B \subset f(f^{-1}(B))$.
Soit $y \in B$. Alors $y \in F$ et comme f est surjective, on a $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) \in B$, $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, ce qui montre que $B \subset f(f^{-1}(B))$.
Ainsi, on a $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $B = f(f^{-1}(B))$.

- Supposons maintenant que $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $B = f(f^{-1}(B))$. On souhaite montrer que f est surjective. Soit $y \in F$. Comme l'hypothèse porte sur des ensembles, on pose $B = \{y\}$.
Alors $f(f^{-1}(B)) = B = \{y\}$. Supposons que x n'ait pas d'antécédent par f, alors $f^{-1}(B)$ (qui est l'ensemble des antécédents de y par f) serait égal à $\varnothing$ et donc $f(f^{-1}(B)) = \varnothing$... absurde ! Ainsi il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et f est surjective.

TD5

Ex 9

ⓐ R est réflexive : $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$, $x \leq x$ et $y \leq y$ donc $(x,y) R (x,y)$

R est antisymétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{N}^2$ tq $(x,y) R (x',y')$ et $(x',y') R (x,y)$, on a alors $(x \leq x'$ et $y \leq y')$ et $(x' \leq x$ et $y' \leq y)$

donc $x = x'$ et $y = y'$ donc $(x,y) = (x',y')$.

R est transitive $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{N}^2$, $\forall (x'',y'') \in \mathbb{N}^2$ tq $(x,y) R (x',y')$ et $(x',y') R (x'',y'')$ on a alors $x \leq x' \leq x''$ et $y \leq y' \leq y''$

donc $x \leq x''$ et $y \leq y''$

donc $(x,y)\ R\ (x'',y'')$.

R est une relation d'ordre mais l'ordre n'est pas total, il est partiel : en effet $(0,2)$ et $(1,0)$ ne sont pas comparables.

ⓑ • Un majorant de A est un couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (x,y) \in A$, $(x,y) R (a,b)$ soit $\forall (x,y) \in A$, $x \leq a$ et $y \leq b$.

Les majorants de A sont tous les couples (a,b) tels que $a \geq 5$ et $b \geq 5$.

• Un minorant de A est un couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (x,y) \in A$, $(a,b) R (x,y)$ soit $a \leq 1$ et $b \leq 1$

Les minorants de A sont $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

• A ne possède pas de plus grand élément.

• A a pour borne supérieure $(5,5)$

• $(1,1)$ est le plus petit élément de A et aussi sa borne inférieure

ⓒ • Les majorants de B sont tous les couples (a,b) tels que $a \geq 5$ et $b \geq 6$

• Les minorants de B sont tous les couples (a,b) tels que $a \leq 1$ et $b \leq 1$

• $\text{Sup}(B) = \max(B) = (5,6)$

• $\text{Inf}(B) = (1,1)$ mais B n'a pas de plus petit élément.