TD7 ex 6

① Rappel : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $(*)$

$\tan(2\arctan x)$ existe ssi $2\arctan x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

or $2\arctan x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ ssi $\arctan x \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$ ssi $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ ou $\arctan x = -\frac{\pi}{4}$

puisque arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ssi $x = 1$ ou $x = -1$

Donc $\tan(2\arctan x)$ existe ssi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\tan(2\underbrace{\arctan x}_{\alpha}) \overset{(*)}{=} \frac{2\tan(\arctan x)}{1-\tan^2(\arctan x)} = \frac{2x}{1-x^2}$

② Soit $x \in [-1, 1]$ $\sin(\underbrace{2\arcsin x}_{\alpha}) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)$

$= 2x \cos(\arcsin x)$

$= 2x\sqrt{1-x^2}$ d'après P

③ Soit $x \in [-1, 1]$ $\cos(\underbrace{2\arccos x}_{\alpha}) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$

④ Soit $x \in [-1, 1]$, $\sin^2\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}\arccos x}_{\alpha}\right) = \frac{1-\cos\left(2 \times \frac{1}{2}\arccos x\right)}{2}$

$= \frac{1-\cos(\arccos x)}{2} = \frac{1-x}{2}$

Pour ② on a utilisé que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Pour ③ on a utilisé que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Pour ④ on a utilisé que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

TD7 Ex7

① D'une part $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, d'autre part $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)+\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1-\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\times\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

- Donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$ ont même tangente.
- De plus $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
  En effet, $0<\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ et arctan est st^t croissante sur $\mathbb{R}$ donc
  $\arctan 0<\arctan\frac{1}{2}<\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $0<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$
  et $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ donc $0<\arctan\frac{1}{3}<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$
  donc $\arctan\frac{1}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[$ et $\arctan\frac{1}{3}\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[$
  donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\in\left]0,\frac{2\pi}{6}\right[=\left]0,\frac{\pi}{3}\right[\subset\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
- Et comme $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est injective, on peut dire que $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

② bis
- Mq $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$.

D'une part $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\right)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{\frac{5+2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{7}{9}$

D'autre part $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(\arctan\frac{1}{8}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\arctan\frac{1}{8}\right)}=\frac{1-\frac{1}{8}}{1+1\times\frac{1}{8}}=\frac{7}{9}$

donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}$ et $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$ ont même tangente

- De plus $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}$ et $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$ sont 2 éléments de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
  En effet, $0<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$ et $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $0<\arctan\frac{1}{5}<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$
  donc $0<\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}<\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
  et $0<\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{6}$ donc $-\frac{\pi}{6}<-\arctan\frac{1}{8}<0$ donc $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{4}$
  or $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}>0$ donc $0<\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.
- Et comme $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est injective, on peut dire que

$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}$

donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

ex 7

② VRAI

Montrons que $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}$ et $\arcsin\frac{56}{65}$ ont le même sinus et appartiennent tous les deux à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- D'une part $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}\right)$

$$= \sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{5}{13}\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\times\frac{3}{5}$$

$$= \frac{5}{13}\times\sqrt{\frac{16}{25}}+\sqrt{\frac{144}{169}}\times\frac{3}{5} = \frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}$$

$$= \frac{20+36}{65} = \frac{56}{65}.$$

D'autre part $\sin\left(\arcsin\frac{56}{65}\right)=\frac{56}{65}$

- De plus $\arcsin\frac{56}{65}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par définition.

Comme $0<\frac{5}{13}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0<\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ et comme arcsin est croissante sur $[-1,1]$,

on a $\arcsin 0<\arcsin\frac{5}{13}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arcsin 0<\arcsin\frac{3}{5}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

ainsi $0<\arcsin\frac{5}{13}<\frac{\pi}{4}$ et $0<\arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{4}$

donc $0<\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

donc $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- Concl: $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est injectif donc $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{5}=\arcsin\frac{56}{65}$

TD7 ex 8

① $f : x \mapsto \arctan \frac{x}{x+1}$ est définie et dér sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que quotient défini et composée de fonctions dérivables

$f' : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2 + x^2}$

② $f : x \mapsto \ln|\ln x|$ est définie et dér sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ en tant que composée de fonctions dérivables

$f' : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

③ $f : x \mapsto e^{x \ln x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables

$f' : x \mapsto (\ln x + 1)\, x^x$

④ $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+a^2}$.

Si $a = 0$, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

Si $a \neq 0$, $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+a^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient défini de fonctions dérivables

$f' : x \mapsto \frac{a^2 - x^2}{(x^2+a^2)^2}$

⑤ $f : x \mapsto \arcsin(e^{-x^2})$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composées de fonctions dérivables

$f' : x \mapsto \frac{-2x\, e^{-x^2}}{\sqrt{1 - \exp(-2x^2)}}$

TD7 ex 9

① $f : x \mapsto \tan x$ admet une primitive sur les intervalle du type :
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ car f est continue sur ces intervalles
Une primitive de f sur l'un de ces intervalles est de la forme :
$F : x \mapsto -\ln|\cos x| + C$, $C \in \mathbb{R}$

② $f : x \mapsto e^{x\ln 2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme : $F : x \mapsto \frac{2^x}{\ln 2} + C$, $C \in \mathbb{R}$

③ $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ n'est définie que si $a \neq 0$
Si $a \neq 0$, f est définie et continue sur $]-|a|, |a|[$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur $]-|a|, |a|[$ est de la forme :
$F : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$

④ $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ est définie et continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$
Une primitive de f sur $]0,1[$ existe donc et est de la forme $F : x \mapsto \ln(-\ln x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ existe donc et est de la forme $F : x \mapsto \ln(\ln x) + C'$, $C' \in \mathbb{R}$

TD 7 ex 12

Soit $f : x \mapsto \arccos(\cos x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$.

f est définie sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est centré en 0 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ car cos est paire donc f est <u>paire</u>. On peut restreindre son étude à $\mathbb{R}^+$. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à (Ox).

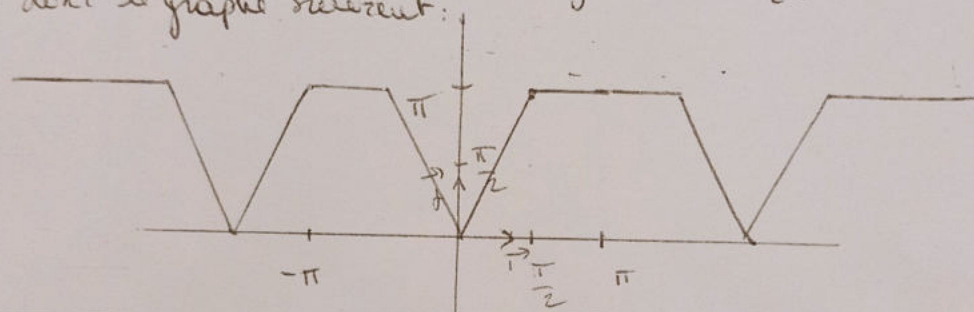
f est 2π-périodique car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x+2\pi) = f(x)$ car cos est <u>2π-périodique</u>. On peut donc restreindre son étude à $]-\pi, \pi]$. Le reste de la courbe se déduit par translations de vecteur $n 2\pi \vec{i}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ainsi on étudie f sur $[0, \pi]$.

Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $2x \in [0, \pi]$ donc $\arccos(\cos 2x) = 2x$ et $\arccos(\cos x) = x$
et $f(x) = x + \frac{1}{2} \cdot 2x = x + x = 2x$.

Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $2x \in [\pi, 2\pi]$ donc $\arccos(\cos x) = x$
et $\arccos(\cos 2x) = \arccos(\cos(-2x))$
$= \arccos(\cos(2\pi - 2x))$
$= 2\pi - 2x$ car $2\pi - 2x \in [0, \pi]$

Ainsi $f(x) = x + \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = \pi$.

On a donc le graphe suivant :



TD7 ex 13

Soit $g : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

g est définie sur $]-1,1]$. En effet, $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ ssi $\begin{cases} 1-x \geq 0 \text{ et } 1+x > 0 \\ \text{ou} \\ 1-x \leq 0 \text{ et } 1+x < 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 1 \geq x \text{ et } x < -1 \\ \text{ou} \\ x \geq 1 \text{ et } x < -1 \text{ (impossible)} \end{cases}$ ssi $x \in]-1,1]$

g est dérivable sur $]-1,1[$ en tant que composée de $\overset{u=}{\arctan}$, dérivable sur $\mathbb{R}$

et de $\overset{v:}{x} \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, dérivable sur $]-1,1[$ en tant que composée de $x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$, dérivable sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in]-1,1[$; $g'(x) = (u' \circ v)(x) \times v'(x)$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \times \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1+x)^2+(1-x)(1+x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{(2x+2)} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\arccos' x.$$

Ainsi, $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \frac{1}{2}\arccos x + \text{cste}$.

Or $g(0) = \frac{1}{2}\arccos 0 + \text{cste} = \frac{\pi}{4} + \text{cste} = \frac{\pi}{4}$ donc cste $= 0$.

donc $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \frac{1}{2}\arccos x$. De plus $g(1) = 0$ et $\frac{1}{2}\arccos 1 = 0$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1],\ g = \frac{1}{2}\arccos.}$

On peut prolonger f par continuité à droite de -1 en posant $f(-1) = \frac{\pi}{2}$

car $\lim_{x \to -1} \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1-x}} = \frac{\pi}{2}$

On obtient la courbe $\mathcal{C}_g$ en appliquant l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{2}$ à $\mathcal{C}_{\arccos}$.