Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Question de cours

Donner l'ensemble de définition, l'ensemble des valeurs, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction arctan.

Exercice 1

1. Etudier la fonction $g\ :\ x \mapsto x^{(x^2)}$. On montrera que g est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
   On tracera la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on fera apparaître les tangentes aux points d'abscisses 0, $e^{\frac{-1}{2}}$ et 1.
   On donne $e^{\frac{-1}{2}} \approx 0,61$, $g(e^{\frac{-1}{2}}) \approx 0,83$.
2. On pose $f(x) = \arcsin(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}})$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire une expression simple de f.

Exercice 2

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$.
   (a) Donner une solution réelle évidente de (E).
   (b) Déterminer $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = (z+1)(z^2 - az + b)$.
   (c) Déterminer les racines carrées de $4i - 3$. On détaillera les calculs.
   (d) En déduire les trois solutions de (E). On détaillera les calculs.
2. On considère dans le plan complexe les quatre points A, B, C et D d'affixes $1-i$, $2+i$, -1 et $-i\sqrt{3}$.
   (a) Faire une figure. On rappelle que $\sqrt{3} \approx 1,73$.
   (b) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.
   (c) Déterminer l'affixe de son centre de gravité.
   (d) Soit E le symétrique de D par rapport à A. Déterminer son affixe.
   (e) La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme D en F et E en H. Déterminer les affixes f et h de F et H.
   (f) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme D en K et E en G. Déterminer les affixes k et g de K et G.
   (g) Montrer que $[KG]$ et $[FH]$ ont le même milieu M. On précisera l'affixe m de M
   (h) Montrer que $\dfrac{h-m}{g-m} = i$.
   (i) En déduire la nature du quadrilatère $FGHK$.

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+ix}{1-ix}$.

1. Questions préliminaires utiles pour la suite de l'exercice
   (a) Montrer que l'application f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est un nombre réel.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 1$.
   (d) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus -1$ et x tel que $f(x) = z$. Exprimer x en fonction de z.
   (e) On reste dans le cadre de la question précédente et on suppose de plus que $|z| = 1$. Exprimer $\bar{z}$ en fonction de z et montrer que dans ce cas x est réel.
2. Montrer que l'application f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que l'application f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
4. Donner la définition de $f^{-1}(\mathbb{R})$. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
5. Donner la définition de $f(\mathbb{R})$. Montrer par double inclusion que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.
6. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.