Chapitre 8 : Primitives

Dans toute la suite I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient au moins deux points et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.
Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.
On rappelle la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^0$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur I est une fonction continue sur I.
f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ ssi

— f est dérivable sur I,
— f' est continue sur I.

1 Calcul de primitives

1.1 Primitives

Définition 1.

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $F : I \to \mathbb{K}$. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I.

► Exemples :Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ admettent sur $\mathbb{R}$ les primitives respectives :
► Exemple : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ admet une primitive sur $]0, +\infty[$:

Propriété 1.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et F une primitive de f sur I.
Soit $G : I \to \mathbb{K}$.
G est une primitive de f sur I ssi $\exists c \in \mathbb{K},\ G = F + c$ sur I.
Ainsi, si f admet une primitive F alors l'ensemble des primitives[1] de f est $\{F + \lambda\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Toutes les courbes représentatives des primitives de f se déduisent de $\mathcal{C}_F$ par les translations de vecteurs $k\vec{j}$ (k réel). Elles réalisent un balayage de la bande de plan définie par $x \in I$.

1.2 Lien entre primitives et intégrale de f

On suppose dans toute la suite que $a < b$.
On généralise la notion d'intégrale au cas des fonctions à valeurs complexes de la façon suivante : si f est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$.
Le téhorème suivant permet de ramener la recherche de primitives au calcul d'une intégrale.

Théorème 1 (Théorème fondamental reliant intégration et dérivation, admis).

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, définie sur $[a, b]$, a pour dérivée f et est donc une primitive de f sur $[a, b]$.
Les primitives de f sur $[a, b]$ sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.
On note $\displaystyle\int f(t)dt = F + c$ où $F = \int_a^{\cdot} f(t)dt$.

Conséquence : toute fonction continue admet des primitives. Mais attention, il n'est pas toujours possible d'exprimer par une fonction usuelle une primitive d'une fonction continue.

Propriété 2.

Plus précisément, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est l'unique primitive de* f *qui s'annule en* a.

► Exemple : la fonction ln est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction inverse qui s'annule en 1.

Propriété 3 (Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive).

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ *et* $a, b \in I$.
Soit F *une primitive de* f *sur* $[a, b]$. *Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

1.3 Primitives usuelles

Fonctions puissances :

Si $m \neq -1$, $\displaystyle\int x^m \mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Si $m = -1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$.

$\displaystyle\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$ sur $\mathbb{R}$.

$a > 0$, $a \neq 1$, $\displaystyle\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ sur $\mathbb{R}$.

Fonctions circulaires :

$\displaystyle\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$ sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$ sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$ sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fonctions hyperboliques :

$\displaystyle\int \mathrm{ch}x \mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$ sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\int \mathrm{sh}x \mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$ sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$ sur $\mathbb{R}$.

Fonctions circulaires réciproques :

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsin}x + C = -\mathrm{arccos} + C'$ sur $]-1, 1[$.

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctan}x + C$ sur $\mathbb{R}$.

Fonction logarithme :

$\displaystyle\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$:

$\displaystyle\int e^{\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C$ sur $\mathbb{R}$.

► Exemple : Calculer les primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.

2 Calcul des primitives

2.1 Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. Si $f(x)$ est de la forme $u(x)u'(x)$:
   $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int u(x)u'(x)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2(x) + C.$
2. Si $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$:
   $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u(x)| + C.$
3. Plus généralement, si $f(x) = \phi'(u(x))u'(x)$ où ϕ est continue et où u est de classe $\mathcal{C}^1$,
   $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int \phi(u)\mathrm{d}u = F(u(x)) + C$ où F est une primitive de ϕ.

► Exemple : $\displaystyle\int \tan x\mathrm{d}x$

2.2 Changement de variables

Propriété 4 (Changement de variable).

Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit f une fonction continue sur $\phi(I)$. On a :

$$\forall a, b \in I,\ \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

*ϕ est appelée **changement de variable**. On a $x = \phi(t), dx = \phi'(t)dt$.*

► Exemple : $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\phi'(t)}{1+\phi^2(t)}\mathrm{d}t =$

► Exemple : Que vaut $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ dans le cas où f est paire ? impaire ?

► Méthode : Pour effectuer le changement de variables $x = \phi(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$, il y a trois opérations à effectuer :
1) remplacer x par $\phi(t)$
2) changer les bornes d'intégration : $\phi(a), \phi(b) \to a, b$
3) changer l'élément différentiel : $\mathrm{d}x$ devient $\varphi'(t)\,dt$

► Exemples : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$

2.3 Intégration par parties

Propriété 5.

Soient u et v des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intégration par parties s'adapte au calcul de primitives dès lors que l'on exprime l'une des primitives sous la forme d'une intégrale $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
Astuce : $f(t) = 1 \times f(t)$.
Une disposition efficace des calculs peut favoriser la mémorisation de la formule.

► Exemple : : Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \mathrm{d}t$.

Démonstration : Cela provient de la linéarité de l'intégrale et de la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

Applications :

1. Remplacer une fonction "désagréable" par sa dérivée plus simple (recherche de primitives pour ln ou arctan).
2. Calculer indirectement une primitive en la faisant réapparaître : par exemple calculer $\int_1^x \sin(\ln(t))\mathrm{d}t$.
3. Obtenir une relation de récurrence : par exemple calculer $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x = I_n$.
4. Calculer $\int P_n(x)e^{ax}\mathrm{d}x$ où P est un polynôme de degré n en intégrant n fois par parties en intégrant à chaque fois le terme exponentielle et en dérivant à chaque fois le terme polynomial jusqu'à obtention d'un polynôme constant : on finit par travailler avec $\int \alpha e^{\alpha x}\mathrm{d}x$. Même méthode avec $\int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$ ou $\int P_n(x)\mathrm{sh}\mathrm{d}x$. Par exemple calculer $\int (x^3+3x)e^{-x}\mathrm{d}x$ ou $\int (x^3+3x)\sin(2x)\mathrm{d}x$.

2.4 Primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$

Propriété 6.

Sur tout intervalle ne contenant pas 0 *on a :*

1. $(\forall a \in \mathbb{C})$ $(\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$, $\displaystyle\int (x-a)^n \, dx = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} +$ *constante*
2. $(\forall a \in \mathbb{R}) \displaystyle\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| +$ *constante*

Méthode : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, avec $\alpha \neq 0$, α, β et γ réels.

1. Si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ alors $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire qu'on la met sous la forme $f : x \longmapsto \dfrac{\lambda_1}{x-x_1} + \dfrac{\lambda_2}{x-x_2}$ puis on intègre chacun des éléments simples avec la propriété précédente.
2. Si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ alors $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x-x_0)^2$. On met la fraction rationnelle sous la forme $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ puis on intègre avec la propriété précédente.
3. Si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ (ssi $4\alpha\gamma > \beta^2$)
   $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}) = \alpha((x+\frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2})$
   $= \alpha((x+\frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{1}{4\alpha^2}(4\alpha\gamma - \beta^2))$ or $4\alpha\gamma > \beta^2$
   $= \alpha(\frac{1}{4\alpha^2}(4\alpha\gamma-\beta^2)((\frac{x+\frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2}(4\alpha\gamma-\beta^2)}})^2+1))$.
   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{b - \frac{a\beta}{2\alpha}}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ est : $x \mapsto \dfrac{2\alpha \arctan(u(x))}{|\alpha|\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}$avec $u(x) = \dfrac{x+\frac{\beta}{2\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2}(4\alpha\gamma-\beta^2)}}$.

► Exemples : $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+9}$, $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$, $\int \frac{x^3}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x$ en faisant un changement de variables $u = x^2$ et en utilisant que $\frac{u}{(u-1)^2} = \frac{u-1+1}{(u-1)^2} = \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}$, $\int \frac{x^4}{(1+x^3)}\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variables $u = 1+x$. On trouve $\frac{(1+x)^2}{2} - 4(1+X) + 6\ln|1+x| + \frac{4}{1+x} + \frac{1}{-2(1+x)^2} + C$.