TD 7 : Fonctions usuelles

▶ Exercice 1 : Résoudre l'équation $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$.

▶ Exercice 2 : Résoudre l'équation $8^{6x} - 3.8^{3x} - 4 = 0$.

▶ Exercice 3 : Etude de $f \ : \ x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

▶ Exercice 4 : Donner la valeur de $\arcsin 0$, $\arcsin(\frac{1}{2})$, $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arcsin 1$, $\arcsin(\pi)$ et $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{6}))$.

▶ Exercice 5 : Représenter les fonctions f définies par les quantités suivantes :

1. $\sin(\arcsin x)$
2. $\cos(\arccos x)$
3. $\arcsin(\sin x)$
4. $\arccos(\cos x)$

▶ Exercice 6 : Simplifier les quantités suivantes :

1. $\tan(2 \arctan x)$
2. $\sin(2 \arcsin x)$
3. $\cos(2 \arccos x)$
4. $\sin^2(\frac{1}{2} \arccos x)$

▶ Exercice 7 : Démontrer que :

1. $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$
2. $\arcsin(\frac{5}{13}) + \arcsin(\frac{3}{5}) = \arcsin(\frac{56}{65})$.

▶ Exercice 8 : En précisant sur quels domaines cela est possible, calculer les dérivées des fonctions définies par les quantités suivantes :

1. $\arctan(\frac{x}{x+1})$
2. $\ln|\ln x|$
3. x^x
4. $\frac{x}{x^2+a^2}$
5. $\arcsin(e^{-x^2})$

▶ Exercice 9 : En précisant sur quels domaines cela est possible, calculer les primitives à une constante près des fonctions définies par les quantités suivantes :

1. $\tan x$
2. 2^x
3. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

4. $\dfrac{1}{x\ln x}$

► Exercice 10 : Résoudre l'équation $\arctan(2x) + \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$.

► Exercice 11 : Résoudre l'équation $\arcsin x = 2\arctan x$.

► Exercice 12 : Etude de $f\ :\ x \mapsto \arccos(\cos x) + \dfrac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$

► Exercice 13 : Etude de $f\ :\ x \mapsto \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

► Exercice 14 : Etude de $f\ :\ x \mapsto x + (1-3x)^{\frac{1}{3}}$

► Exercice 15 : Etude de $f\ :\ x \mapsto e^{x^2-x-1}$

► Exercice 16 : Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x)^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$.

► Exercice 17 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{\begin{array}{c} x = \mathrm{ch}(2y) \\ 3\ln x = 2\ln(\mathrm{ch}y) \end{array}\right.$

► Exercice 18 : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}(a+kb)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sh}(a+kb)$

► Exercice 19 : En précisant sur quel domaine cela est possible, calculer la dérivée de $x \mapsto \exp(\mathrm{sh}x)$.

► Exercice 20 : Résoudre l'équation $\mathrm{ch}x = 2$.

► Exercice 21 :

1. Sur quel intervalle a-t-on $\mathrm{th}x = \dfrac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}x}$?
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \mathrm{th}\left(2^k x\right)$.

► Exercice 22 : Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On note sh^{-1} sa bijection réciproque. En précisant sur quel domaine cela est possible, calculer la dérivée de sh^{-1}.