

Chapitre 9 : Systèmes linéaires

Introduction

Un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations linéaires. La résolution des systèmes d'équations linéaires appartient aux problèmes les plus anciens dans les mathématiques et ceux-ci apparaissent dans beaucoup de domaines, comme dans le traitement des signaux numériques ou dans l'approximation de problèmes non-linéaires en analyse numérique, ou à travers la méthode des différences finies et celle des moindres carrés. En effet un système linéaire a des caractéristiques et des propriétés beaucoup plus simples que le cas général non-linéaire.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

► Exemple : Résoudre par substitution puis par combinaison le système suivant : $S = \begin{cases} 2x - y = -2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$.
puis donner un énoncé dont la solution nécessite la résolution de ce système.

► Exemple : Résoudre par combinaison le système $S = \begin{cases} jx - j^2y = 1 \\ j^2x + jy = -1 \end{cases}$.

1 Systèmes d'équations linéaires

$$\text{Soit } S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

S est un **système linéaire de n équations à p inconnues**.

Les a_{ij} et les b_k sont des paramètres et $x_1, \dots, x_p$ sont les inconnues.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$, si A est le tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes constitué d'éléments de

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ et si } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \text{ alors } X \text{ est appelée } \mathbf{l'inconnue}, A, \text{ que l'on pourra}$$

noter $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, est appelée la **matrice du système** et B le **second membre du système** S .

La **matrice augmentée du système** S est le tableau noté $(A|B)$ qui a n lignes et $p + 1$ colonnes.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array} \right)$$

Lorsque $n = p$, on dit que le système est **carré**. Lorsque $B = 0$, on dit que S est **homogène**; sinon, on lui associe le système homogène S_0 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

On appelle **solution** de S tout p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant chacune des n équations de S .

Résoudre un système linéaire, c'est trouver toutes les solutions du système.

Lorsque S possède au moins une solution, on dit que S est **compatible**. Sinon il est **incompatible**.

► Exemple : Préciser la matrice, le second membre, la matrice augmentée du système

$$S = \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases}.$$

2 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Définition 1 (Opérations élémentaires).

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** d'un système linéaire l'une de opérations suivantes :

- échange des lignes i et j , opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$,
- multiplication de la ligne i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul, opération notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$,
- ajout de λ fois la ligne j à la ligne i ($i \neq j$), opération notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Remarque 1. On définit et on note à l'identique les opérations sur les colonnes d'une matrice.

Définition 2 (Systèmes équivalents. Matrices équivalentes par lignes).

On dit que deux systèmes S et S' sont équivalents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

On dit que deux matrices A et A' sont équivalentes par lignes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $A \sim_L A'$.

Propriété 1.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Propriété 2.

Si l'on passe d'un système S à un autre système S' par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de S' s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de S .

Ce résultat justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.

3 Echelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Définition 3.

Une matrice à n lignes et p colonnes est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi,
- à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Une matrice échelonnée en lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

► Exemples : voici une matrice échelonnée par lignes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et une matrice éche-}$$

lonnée réduite par lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 3.

1. Il est possible, par des opérations élémentaires sur les équations, de transformer tout système linéaire S en un système linéaire échelonné et équivalent à S .
2. Il est possible de transformer toute matrice en une matrice échelonnée équivalente.
3. Toute matrice est équivalente à une unique matrice échelonnée réduite par ligne.

► Exemple : à l'aide de manipulations élémentaires sur les lignes, transformer M en une matrice échelonnée réduite par lignes, dans le cas où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

C'est l'item 1 de cette propriété qui permet la résolution du système linéaire. Sa démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'équations du système.

On transforme le système initial S en un nouveau système S' dont la matrice est une matrice échelonnée (méthode du pivot de Gauss). S' et S sont donc équivalents. Le système S' est simple à résoudre en "remontant par substitutions".

On appelle **rang du système** S le nombre de pivots de S' . Deux cas de figures se présentent alors :

- le nombre d'équations n est supérieur au rang du système r . Les $n - r$ dernières équations, dont le premier membre est nul, sont appelées **équations secondaires**. Si le second membre de ces équations secondaires n'est pas nul, il n'y a pas de solution et le système n'est pas compatible. Si le second membre de ces équations secondaires est nul alors le système est compatible. On a besoin de $p - r$ inconnues appelées **inconnues secondaires ou paramètres** pour décrire l'ensemble des solutions. Pour cela, on exprime les r inconnues principales en fonction des $p - r$ inconnues secondaires,
- le nombre d'équations n est égal au rang du système r , auquel cas on obtient une unique solution.

► Exemple : Dans le système échelonné réduit suivant : $S = \begin{cases} x - 2z = 10 \\ y + 4z = -9 \end{cases}$.

, les inconnues sont x , y et z . Les inconnues principales sont x et y . L'inconnue secondaire est z . Le rang de S est 2.

4 Interprétation géométrique d'un système

4.1 Interprétation géométrique d'un système de deux équations à deux inconnues

Les deux équations sont représentées par deux droites D_1 et D_2 dans $\mathbb{R}^2$.

- Lorsque la solution est unique, c'est que l'intersection des deux droites est un point.
- Lorsqu'il n'y a aucune solution, c'est que les deux droites sont parallèles.
- Lorsque'il y a une infinité de solutions, c'est que les deux droites sont confondues.

4.2 Interprétation géométrique d'un système de trois équations à trois inconnues

Les trois équations sont représentées par trois plans H_1 , H_2 et H_3 dans $\mathbb{R}^3$.

- Lorsque la solution est unique, c'est que l'intersection des trois plans est un point.
- Lorsqu'il n'y a aucune solution, c'est que les plans se coupent deux à deux mais sans point d'intersection commun, ou bien que deux plans (ou plus) sont parallèles entre eux.
- Lorsque'il y a une infinité de solutions, c'est que les trois plans se coupent selon une même droite ou bien que deux plans (ou plus) coïncident.

5 Exercices

► Exemple : 1 Résoudre $S = \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases}$.

► Exemple : 2 Résoudre $S = \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases}$.

► Exemple : 3 Résoudre $S = \begin{cases} x - 3y + 7z = -4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases}$.

► Exemple : 4 Résoudre suivant la valeur du réel m $S = \begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$.

► Exemple : 5 Résoudre suivant la valeur du réel m $S = \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$.