DM5 à rendre pour le vendredi 8 décembre

Exercice 1 : Etude d'une suite définie par une intégrale

Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \mathrm{d}x$.
Dans cet exercice on pourra utiliser sans la démontrer la propriété dite de croissance de l'intégrale : si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ telles que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
Les trois dernières questions sont facultatives.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe et calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.
5. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
6. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$
7. Montrer que, pour $n \geq 0$,
$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}.$$
8. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}.$$
9. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.
10. Etablir que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 2 : Etude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction H définie par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer H'.
3. Soit $x > 1$, montrer que $e^x \ln x \leq H(x) \leq e^{x^2} \ln x$.
4. En déduire $\lim_{x\to+\infty} H(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_H$?