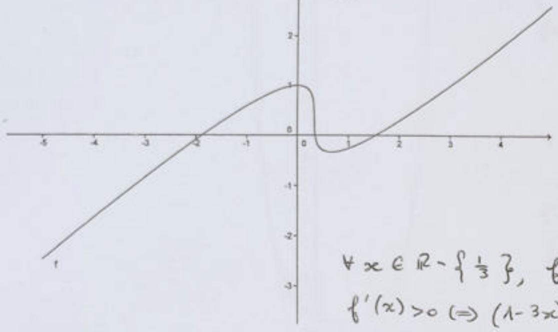
Ex 14 TD7



(DEUXIEME APPROCHE : $x^{\frac{1}{3}}$ vaut $e^{\frac{1}{3}\ln x}$ si $x>0$. On prolonge par continuité $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ en 0 puis on prolonge par imparité $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ à $\mathbb{R}_-^*$. On retrouve alors la bijection réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ (notée $\sqrt[3]{\ }$).)

Soit $f : x \mapsto x + (1-3x)^{\frac{1}{3}}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ en tant que somme et composée des fonctions $\begin{cases} x \mapsto x, \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto 1-3x, \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{\frac{1}{3}}, \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{3} \times (-3)(1-3x)^{\frac{1}{3}-1} = 1 - (1-3x)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{(1-3x)^{\frac{2}{3}} - 1}{(1-3x)^{2/3}}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-3x)^{\frac{2}{3}} > 1 \Leftrightarrow (1-3x)^2 > 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(3x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \dfrac{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \left(\dfrac{1-3x}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = +\infty.$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{1-3x}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-3x)^{\frac{1}{3}} = -\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-1)^{\frac{1}{3}} = -\infty$

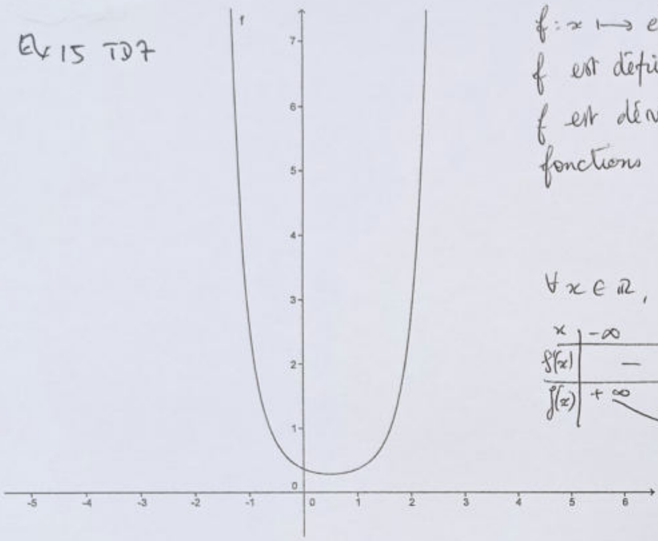
donc en $+\infty$ il y a une branche parabolique de direction asymptotique $y = x$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = +\infty$ et en $-\infty$ il y a aussi une branche parabolique dans la direction de la première bissectrice.

La tangente est verticale en $x = \frac{1}{3}$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{x + (1-3x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}}{x - \frac{1}{3}} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{x-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}} + \dfrac{(-3)^{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}{x-\frac{1}{3}}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} 1 + \left(x-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = +\infty$ si $x \to \frac{1}{3}^+$

Ex 15 TD7



$f : x \longmapsto e^{x^2-x-1}$

f est définie sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée des fonctions $\begin{cases} x \longmapsto -x-1, \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2, \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp x, \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^\prime(x) = (2x-1)\, e^{x^2-x-1}$

$2x-1 < 0$ ssi $x < \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f^\prime(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$e^{-\frac{5}{4}}$		$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{x^2-x-1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{e^{x^2-x-1}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$

d'après le théorème de croissance comparée.

On conclut donc que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique (O_y) en $\pm\infty$.

Comme $f^\prime(0) = 0$, la tangente en $x = \frac{1}{2}$ est horizontale.