

EX 1:

EQUATIONS DIFFERENTIELLES TD10

- (1) • l'éq homogène associée est $xy' + y = 0$
 $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est cont sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet comme primitive $x \mapsto -\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$
 donc l'ens des sol de l'éq homogène est $\{x \mapsto x e^{-\ln x}, K \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}\}$

• Déterminons une solution particulière y_p sous la forme
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* y_p(x) = k(x) y_1(x)$ où k est 1 fct de $\mathbb{R}_+^*$ et où $y_1: x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} y_p \text{ est sol de l'éq ssi } \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \quad xy'_p(x) + y_p(x) = xe^x \\ \text{ssi } \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \quad x(k'(x)y_1(x) + k(x)y'_1(x)) + k(x)y_1(x) = xe^x \\ \text{ssi } \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \quad k(x)(xy'_1(x) + y_1(x)) + xk'(x)y_1(x) = xe^x \\ \text{ssi } \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \quad k'(x) = \frac{xe^x}{xy_1(x)} = \frac{ex}{\frac{1}{x}} = xe^x \end{aligned}$$

on choisit par exemple $k: x \mapsto x e^x - e^x$ qui correspond à $y_p: x \mapsto e^x - \frac{e^x}{x}$
 L'ens des sol de l'éq est donc $\{x \mapsto e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}\}$

- (2) • l'éq homogène associée est $y' - 2xy = 0$
 $x \mapsto 2x$ est cont sur $\mathbb{R}$ et admet comme primitive $x \mapsto x^2$
 donc l'ens des sol de l'éq homogène est $\{x \mapsto K e^{x^2}, K \in \mathbb{R}\}$

• Déterminons une solution particulière sous la forme
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad y_p(x) = k(x) y_1(x)$ où k est 1 fct de $\mathbb{R}$ et où $y_1: x \mapsto e^{x^2}$
 y_p est sol de l'éq ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'_p(x) - 2x y_p(x) = x e^{3x^2}$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad (k'(x)y_1(x) + k(x)y'_1(x)) - 2x k(x)y_1(x) = x e^{3x^2}$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad k(x)(y'_1(x) - 2x y_1(x)) + k'(x)y_1(x) = x e^{3x^2}$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad k'(x) = \frac{x e^{3x^2}}{y_1(x)} = \frac{x e^{3x^2}}{e^{x^2}} = x e^{2x^2}$

On choisit par ex $k: x \mapsto \frac{e^{2x^2}}{4}$ qui correspond à $y_p: x \mapsto \frac{e^{2x^2}}{4} x e^{x^2}$
 L'ens des sol de l'éq est donc $\{x \mapsto \frac{1}{4} e^{3x^2} + K e^{x^2}, K \in \mathbb{R}\}$

- (3) • l'éq homogène associée est $(1+x^2)^2 y' + 2xy = 0$
 $x \mapsto -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ est cont sur $\mathbb{R}$ et admet comme primitive $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
 donc l'ens des sol de l'éq homogène est $\{x \mapsto K e^{\frac{1}{1+x^2}}, K \in \mathbb{R}\}$

• Déterminons une solution particulière de l'équation sous la forme
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad y_p(x) = k(x) y_1(x)$ où k est une fct de $\mathbb{R}$ et où $y_1: x \mapsto e^{\frac{1}{1+x^2}}$

$$\begin{aligned} y_p \text{ est sol de l'éq ssi } \forall x \in \mathbb{R} & \quad (1+x^2)^2 y'_p(x) + 2x y_p(x) = x e^{\frac{1}{1+x^2}} \\ \text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} & \quad (1+x^2)^2 (k'(x)y_1(x) + k(x)y'_1(x)) + 2x k(x)y_1(x) = x e^{\frac{1}{1+x^2}} \\ \text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} & \quad k(x)((1+x^2)^2 y'_1(x) + 2x y_1(x)) + k'(x)(1+x^2)^2 y_1(x) = x e^{\frac{1}{1+x^2}} \end{aligned}$$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad k'(x) = \frac{x e^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2 y_1(x)} = \frac{x}{(1+x^2)^2}$
 On choisit par ex $k: x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$ qui correspond à $y_p: x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} e^{\frac{1}{1+x^2}}$
 L'ens des sol est donc $\{x \mapsto K e^{\frac{1}{1+x^2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} e^{\frac{1}{1+x^2}}, K \in \mathbb{R}\}$

- (4) • l'éq homogène associée est $y' + y \tan x = 0$
 $x \mapsto -\tan x$ est cont sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et admet comme primitive $x \mapsto \ln(\cos x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc l'ens des sol de l'éq homogène est $\{x \mapsto K e^{\ln(\cos x)}, K \in \mathbb{R}\}$ soit $\{x \mapsto K \cos x, K \in \mathbb{R}\}$.

- Déterminons une sol part de l'Eq sous la forme
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad y_p(x) = K(x) y_1(x)$ où K est une fcn des sur $\mathbb{R}$ et où $y_1: x \mapsto \cos x$
 y_p est sol de l'Eq ssi $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y_1'(x) + y_p(x) \tan x = \cos^2 x$
 ssi $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $K'(x) y_1(x) + K(x) y_1'(x) + K(x) y_1(x) \tan x = \cos^2 x$
 ssi $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $K'(x) (y_1'(x) + y_1(x) \tan x) + K(x) y_1(x) = \cos^2 x$
 ssi $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $K'(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$
 On choisit par ex $K = \sin x$ qui correspond à $y_p: x \mapsto \sin x \cos x$
 L'ens des sol est donc $\{x \mapsto K \cos x + \sin x \cos x, K \in \mathbb{R}\}$

- l'Eq homogène associée est $y' - y = 0$
 l'ens des sol de l'Eq homogène est $\{x \mapsto K e^x, K \in \mathbb{R}\}$
 ⑤ On cherche une sol part sous la forme $ax^2 + bx + c = y_p(x) \forall x \in \mathbb{R}$
 y_p est sol de l'Eq ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2ax + b - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x - 1$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad -ax^2 + (2a-b)x + b-c = x^2 + 2x - 1$
 Si $\begin{cases} a = -1 \\ 2a-b = 2 \\ b-c = -1 \end{cases}$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad -ax^2 + (2a-b)x + b-c = x^2 + 2x - 1$

donc le choix $\begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}$ convient et $y_p: x \mapsto -x^2 - 4x - 3$ est 1 sol possible
 l'ens des sol est donc $\{x \mapsto K e^x - x^2 - 4x - 3, K \in \mathbb{R}\}$

- ⑥ On cherche une sol part sous la forme $y_p(x) = a \cos x + b \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
 y_p est sol de l'Eq ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad -a \sin x + b \cos x - a \cos x - b \sin x = \cos x$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad (-a-b) \sin x + (b-a) \cos x = \cos x$
 Si $\begin{cases} a-b=0 \\ b-a=1 \end{cases}$ alors on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad (-a-b) \sin x + (b-a) \cos x = \cos x$
 donc le choix $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ convient et $y_p: x \mapsto -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ est 1 sol possible
 l'ens des sol est donc $\{x \mapsto K e^x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, K \in \mathbb{R}\}$

- ⑦ On cherche une sol part sous la forme $y_p(x) = K e^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$
 y_p est sol de l'Eq ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2K e^{2x} - K e^{2x} = e^{2x}$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad K e^{2x} = e^{2x}$
 Si $K=1$ alors on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad K e^{2x} = e^{2x}$
 donc le choix $K=1$ convient et $y_p: x \mapsto e^{2x}$ est 1 sol possible
 l'ens des sol est donc $\{x \mapsto K e^x + e^{2x}, K \in \mathbb{R}\}$

- ⑧ On cherche une solution particulière de l'équation $y' - y = x e^x$
 sous la forme $\forall x \in \mathbb{R} \quad y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C) e^x$
 y_p est sol de l'Eq ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad (2Ax + B) e^x + (Ax^2 + Bx + C) e^x - (Ax^2 + Bx + C) e^x = x e^x$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2Ax + B = x$
 ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2Ax + B = x$ ssi $2A=1$ et $B=0$
 $y_p: x \mapsto \frac{1}{2} x^2 e^x$ est une sol particulière
 D'après le principe de superposition, l'ensemble des solutions est:
 $\{x \mapsto K e^x - x^2 - 4x - 3 - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^x, K \in \mathbb{R}\}$

E_q 2:

- ① l'éq caractéristique associée (EC) est: $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$
 Cette eq a 2 sol réelles distinctes: $\frac{3-1}{2}$ et $\frac{3+1}{2}$ soit 1 et 2
 D'après le cours l'ens des sol de l'éq diff est donc:
 $\{x \mapsto A e^x + B e^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$
- ② l'éq caractéristique associée (EC) est: $x^2 - 2x - 3 = 0$
 Cette eq a 2 sol réelles distinctes: 3 et -1
 D'après le cours l'ens des sol de l'éq diff est donc:
 $\{x \mapsto A e^{3x} + B e^{-x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$
- ③ l'éq caractéristique associée (EC) est: $x^2 + 4x + 4 = 0 = (x+2)^2$
 Cette eq a une unique solution: -2
 D'après le cours l'ens des sol de l'éq diff est donc:
 $\{x \mapsto A e^{-2x} + B x e^{-2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$
- ④ l'éq caractéristique associée (EC) est: $4x^2 - 4x + 1 = 0 = 4(x - \frac{1}{2})^2$
 Cette eq a une unique solution: $\frac{1}{2}$
 D'après le cours l'ens des sol de l'éq diff est donc:
 $\{x \mapsto A e^{-\frac{1}{2}x} + B x e^{-\frac{1}{2}x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$
- ⑤ l'éq caractéristique associée (EC) est: $x^2 + x + 1 = 0$ $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$
 Cette eq a 2 sol complexes conjugués: $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
 D'après le cours l'ens des sol de l'éq diff est donc:
 $\{x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} (A \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$
- ⑥ l'éq caractéristique associée (EC) est: $x^2 - 2x + 2 = 0$ $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$
 Cette eq a 2 sol complexes conjugués: $\frac{2 \pm 2i}{2}$, soit 1 et 1-i
 D'après le cours l'ens des sol de l'éq diff est donc:
 $\{x \mapsto e^x (A \cos x + B \sin x), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

- ⑦ On commence par résoudre l'éq homogène associée:
 $y'' - 2y' - 8y = 0$ l'éq caractéristique associée (EC) est:
 $x^2 - 2x - 8 = 0$ ($\Delta = 4 + 4 \times 8 = 36 = 6^2$) (EC) a 2 sol réelles distinctes:
 4 et -2. l'ens des sol de l'éq homogène est donc:
 $\{x \mapsto A e^{4x} + B e^{-2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

On cherche une sol part de $y'' - 2y' - 8y = x + 1$ sous la forme $y_p(x) = ax + b \forall x \in \mathbb{R}$.

y_p est sol part si $\forall x \in \mathbb{R} \quad -2a - 8(ax+b) = x+1$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad -8ax - 8b - 2a = x+1$

ssi le pol $(-8a-1)x + (-8b-2a-1)$ est le pol nul
 (infinité de racines)

ssi $-8a-1=0$ et $-8b-2a-1=0$

ssi $a = -\frac{1}{8}$ et $b = -\frac{1}{8}(1+2a) = -\frac{1}{8}(1-\frac{2}{8}) = \frac{-6}{64} = -\frac{3}{32}$

une sol part de $y'' - 2y' - 8y = x+1$ est donc $x \mapsto -\frac{1}{8}x - \frac{3}{32}$

- On cherche une sol part de $y'' - 2y' - 8y = e^{-2x}$ sous la forme $\forall x \in \mathbb{R}$
 y_p est sol part

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-2x} (4ax + 4b - 4a) - 2e^{-2x} (-2ax - 2b + a) - 8(ax + b)e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad 4ax + 4b - 4a + 4ax + 4b - 2a - 8ax - 8b = 1$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad -6a = 1 \quad \text{ssi } a = -\frac{1}{6} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

on choisit par ex $b = 0$ et on propose $y_p: x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-2x}$

- Concl: l'ensemble des sol de l'eq diff $y'' - 2y' - 8y = x + 1 + e^{-2x}$ est $\{x \mapsto Ae^{4x} + Be^{-2x} + (-\frac{1}{8}x - \frac{3}{32}) - \frac{1}{6}xe^{-2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ d'après le principe de superposition.

- ⑧ L'eq homogène associée est $y'' - 2y' + y = 0$. L'eq car associée est $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ Cette eq car a 1 unique sol réelle: 1

donc l'ensemble des sol de l'eq homogène est: $\{x \mapsto Ae^x + Bxe^x, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

- On cherche 1 sol part de $y'' - 2y' + y = x^2$ sous la forme $y_p: x \mapsto ax^2 + bx + c$

$$y_p \text{ est sol part ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad 2a - 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad 2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c = x^2$$

$$\text{ssi le pol } x^2(a-1) + x(-4a+b) + (2a-2b+c) \text{ a 1 infinité de rac}$$

$$\text{ssi le pol est nul}$$

$$\text{ssi } a-1=0 \text{ et } -4a+b=0 \text{ et } 2a-2b+c=0$$

$$\text{ssi } a=1 \text{ et } b=4 \text{ et } c=6$$

$$y_p: x \mapsto x^2 + 4x + 6 \text{ est 1 sol part}$$

- On cherche 1 sol part de $y'' - 2y' + y = \cos x$ sous la forme $y_p: x \mapsto A \cos x + B \sin x$

$$y_p \text{ est sol part ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (-A \cos x - B \sin x) - 2(-A \sin x + B \cos x) + A \cos x + B \sin x = \cos x$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x (-A - 2B + A - 1) + \sin x (-B + 2A + B) = 0$$

$$\text{ssi } -2B - 1 = 0 \text{ et } 2A = 0 \text{ car } (\cos, \sin) \text{ est libre}$$

$$\text{ssi } A=0 \text{ et } B = -\frac{1}{2}$$

$$y_p: x \mapsto -\frac{1}{2} \sin x$$

- Concl: l'ensemble des sol de l'eq diff $y'' - 2y' + y = x^2 + \cos x$ est donc: $\{x \mapsto Ae^x + Bxe^x + x^2 + 4x + 6 - \frac{1}{2} \sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ d'après le principe de superposition.

- ⑨ L'eq homogène associée est $y'' + y = 0$. L'eq car associée est $x^2 + 1 = 0$ qui admet 2 sol complexes conjugués: i et $-i$.

l'ensemble des sol de l'eq homogène est donc $\{x \mapsto A \cos x + B \sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

- 1 sol part de $y'' + y = \cos x$ est par ex: $x \mapsto \frac{1}{2} x \sin x$

- 1 sol part de $y'' + y = x + 1$ est par ex: $x \mapsto x + 1$

- Concl: l'ensemble des sol de l'eq diff $y'' + y = \cos x + x + 1$ est donc:

$$\{x \mapsto A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} x \sin x + x + 1, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

d'après le principe de superposition.

Exercice 3:

- (1) $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ est cont sur $] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ et admet comme primitive $x \mapsto -\ln(\cos x)$
 donc l'ens des sol est $\{x \mapsto K e^{-\ln(\cos x)}, K \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \frac{K}{\cos x}, K \in \mathbb{R}\}$
 On cherche la sol telle que $y(0) = 1$. $y: x \mapsto \frac{K}{\cos x}$
 est la sol du pb de Cauchy ssi $y(0) = 1$ ssi $\frac{K}{\cos 0} = 1$ ssi $K = 1$
 Donc la sol du pb de Cauchy est: $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

- (2) $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est cont sur $]1, +\infty[$ et admet comme primitive $x \mapsto \ln(\ln x)$ sur $]1, +\infty[$ donc l'ens des sol est: $\{x \mapsto K e^{\ln(\ln x)}, K \in \mathbb{R}\}$
 $= \{x \mapsto K \ln x, K \in \mathbb{R}\}$
 $y: x \mapsto K \ln x$ est la sol du pb de Cauchy ssi $y(e) = 1$ ssi $K \ln e = 1$ ssi $K = 1$
 $y: x \mapsto \ln x$ est la sol du pb de Cauchy

- (3) • l'eq homogène associée est: $y' + xy = 0$
 $x \mapsto -x$ est cont sur $\mathbb{R}$ et admet comme primitive $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$
 Donc l'ens des sol de l'eq homogène est: $\{x \mapsto K e^{-\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}\}$
 • Cherchons une sol part de l'eq - $y_p: x \mapsto 2$ convient!
 Donc l'ens des sol de l'eq est $\{x \mapsto 2 + K e^{-\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}\}$
 $y: x \mapsto 2 + K e^{-\frac{x^2}{2}}$ est sol du pb de Cauchy ssi $y(0) = 1$
 $y: x \mapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ est sol du pb de Cauchy ssi $2 + K = 1$ ssi $K = -1$

- (4) On a déjà résolu l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$
 dans l'ex2 (1) - l'ens des sol est:
 $\{y: x \mapsto A e^x + B e^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$
 On cherche $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$
 or $y(0) = A + B$ et $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = A e^x + 2B e^{2x}$ donc $y'(0) = A + 2B$
 On a donc le syst $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = -1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} B = 1 - A \\ A + 2(1 - A) = -1 \end{cases}$
 ssi $\begin{cases} B = 1 - 3 = -2 \\ A = 3 \end{cases}$

La solution du pb de Cauchy est donc $x \mapsto 3e^x - 2e^{2x}$

Exercice 8

① z est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tout que produit de fct's dérivables.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$y(x) = \frac{z(x)}{1+e^x}$$

$$y'(x) = \frac{z'(x)(1+e^x) - e^x z(x)}{(1+e^x)^2} = \frac{z'(x)}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} z(x)$$

$$y''(x) = \frac{z''(x)(1+e^x) - e^x z'(x)}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x (1+e^x)^2 - e^x \cdot 2(1+e^x) \cdot e^x}{(1+e^x)^4} \cdot z(x) - z'(x) \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{1}{(1+e^x)^2} \left((1+e^x) z''(x) - e^x z'(x) - z'(x) e^x - e^x z(x) + \frac{2e^{2x}}{(1+e^x)} z(x) \right) \\ &= \frac{1}{(1+e^x)^2} \left((1+e^x) z''(x) + z(x) \frac{2e^{2x} - e^x(1+e^x)}{1+e^x} - 2e^x z'(x) \right) \\ &= \frac{1}{(1+e^x)^2} \left((1+e^x) z''(x) + z(x) \frac{e^{2x} - e^x}{1+e^x} - 2e^x z'(x) \right) \\ &= \frac{z''(x)}{1+e^x} + \frac{z(x) e^x}{(1+e^x)^2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} z'(x) \end{aligned}$$

y est sol de (E) sur $\mathbb{R}$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x) y''(x) + 2e^x y'(x) + (2e^x + 1) y(x) = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x) \left[\frac{z''(x)}{1+e^x} + \frac{z(x) e^x}{(1+e^x)^2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 2e^x \frac{z'(x)}{(1+e^x)^2} \right] + (2e^x + 1) \frac{z(x)}{1+e^x} = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad z''(x) + \frac{z(x) e^x (e^x - 1)}{(1+e^x)^2} - 2e^x \frac{z'(x)}{(1+e^x)^2} + \frac{z(x)}{(1+e^x)^2} (-2e^{2x} + (2e^x + 1)(1+e^x)) = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad z''(x) + \frac{z(x)}{(1+e^x)^2} [e^{2x} - 2e^{2x} + 2e^x + 2e^{2x} + 1 + e^x] = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad z''(x) + \frac{z(x)}{(1+e^x)^2} [e^{2x} + 2e^x + 1] = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad z''(x) + z(x) \frac{(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad z''(x) + z(x) = x e^x$

ssi z est sol de l'éq (F): $z'' + z = x e^x$ sur $\mathbb{R}$

② Résolution de (F):

(F_h): $z'' + z = 0$

(E_c): $\lambda^2 + 1 = 0$ admet 2 rac compl conj: i et $-i$

$S_H = \{x \mapsto e^{0x} (A \cos 1x + B \sin 1x), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

Cherchons une sol part de (F) sous la forme: $y_p(x) = (Kx + K') e^x$

y_p est 2 fois dér sur $\mathbb{R}$ et y_p est sol de (F) ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad y_p''(x) + y_p(x) = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad K(2e^x + x e^x) + 2K e^x + K x e^x = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad (2K + 2K') e^x + (2Kx - 1)x e^x = x e^x$

ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad (2K + 2K') + (2K - 1)x = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$

ssi $2K + 2K' = 0$ car les coord de pol nul dans la base

ssi $\begin{cases} 2K + 2K' = 0 \\ 2K - 1 = 0 \end{cases}$ car les coord de pol nul dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ sont uniques

ssi $K = \frac{1}{2}$ et $K' = -\frac{1}{2}$

Donc $S = \{x \mapsto A \cos x + B \sin x + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) e^x, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

Donc $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} e^x}{1+e^x}$