Chapitre 11 : Nombres réels et suites numériques

1 Nombres réels

1.1 Ensembles usuels de nombres

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. C'est un ensemble infini : chaque entier n possède un successeur $n+1$.
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. C'est un ensemble infini. Tout entier naturel est un entier relatif.

Définition 1.

> *On appelle nombre rationnel tout nombre qui peut s'écrire $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.*

► Exemples :$\frac{-5}{13}$, $\frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}$, $n = \frac{n}{1}$, où n est un entier relatif, sont des nombres rationnels. π et $\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres irrationnels, ce sont des nombres **irrationnels**. L'irrationnalité de π date de 1761 (Lambert). La démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ date de 25 siècles (mathématiciens grecs) et nous donne l'occasion de pratiquer le raisonnement par l'absurde.

Propriété 1.

> *Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique (à partir d'un certain rang).*

► Exemple : : $0,12341234123412 34...$, où 1234 se répète périodiquement dans le développement décimal, est un nombre rationnel (il s'agit de $\frac{1234}{9999}$).
Parmi les nombres rationnels, on distinguer deux types de nombres : ceux dont le développement décimal s'arrête et ceux dont le développement décimal est illimité.

Définition 2.

> *On apppelle **nombre décimal** tout nombre rationnel dont le développement décimal est fini. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.*

► Exemples : : tout entier naturel ou relatif, $\frac{1}{8}$ et $\frac{7}{5}$ sont décimaux. $\frac{1}{3} = 0,3333...$, $\frac{1234}{9999}$ ne sont pas décimaux.
Lorsqu'un nombre rationnel a un nombre fini de décimales après la virgule, on peut facilement obtenir un entier en le multipliant par une puissance de 10, alors que ce n'est pas possible lorsque le développement décimal est illimité.

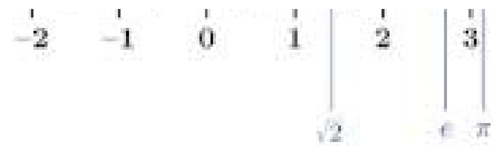
Propriété 2.

> *Un nombre rationnel est décimal si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.*

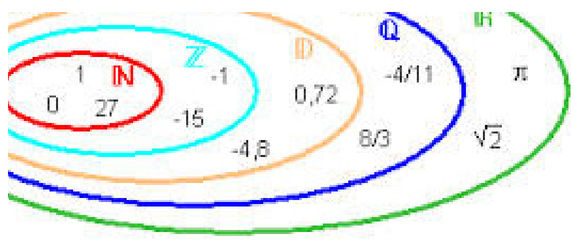
Ainsi, pour savoir si un nombre rationnel est décimal, on le met sous forme de fraction irréductible, et si le dénominateur est de la forme $2^p \times 5^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$, alors le nombre est décimal, sinon il ne l'est pas.
► Exemples :$\frac{76}{475}$ et $\frac{323}{187}$ sont-ils décimaux ?

Définition 3.

Les nombres réels sont les nombres qui sont représentés sur une droite graduée. L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$.
A tout point de la droite correspond un unique réel (abscisse du point). A tout nombre réel correspond un unique point de la droite.



On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



1.2 Borne supérieure

On rappelle que $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ et que $\leq$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$.

Définition 4.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On définit :
- *la **borne supérieure de** X : lorsqu'elle existe, la borne supérieure est le plus petit des majorants. Elle est notée sup(X). La borne sup n'existe pas toujours mais quand elle existe elle est unique. Lorsque X admet un plus grand élément, c'est aussi la borne sup.*
- *la **borne inférieure de** X : lorsqu'elle existe, la borne inférieure est le plus grand des minorants. Elle est notée inf(X). La borne inf n'existe pas toujours mais quand elle existe elle est unique. Lorsque X admet un plus petit élément, c'est aussi la borne inf.*

Remarque 1. *Formellement, $M \in \mathbb{R}$ est la borne sup de X dans E si*

$$\forall x \in X,\ x \leq M \ \text{ et } (\forall M' \in \mathbb{R}, (\forall x \in X,\ x \leq M') \Rightarrow M \leq M').$$

Propriété 3 (Propriété de la borne supérieure).

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Remarque 2. *Propriété de la borne inférieure : toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

▶ Exemple : Soit X une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\inf(X) \leq \sup(X)$. Quand a-t-on égalité ?
▶ Exemple : Soient X et Y deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, avec $X \subset Y$. Comparer $\sup(X)$ et $\sup(Y)$ puis $\inf(X)$ et $\inf(Y)$. Peut-on avoir égalité alors que X et Y ne sont pas égaux ? Ranger $\inf(X)$, $\inf(Y)$, $\sup(X)$ et $\sup(Y)$ dans l'ordre croissant.

Propriété 4 (Caractérisation de la borne supérieure).

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X \subset \mathbb{R}$ tel que X admet une borne supérieure.

$$a = sup(X) \text{ ssi } \forall x \in X,\ x \leq a \text{ et } \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in X,\ a - \epsilon < x.$$

Propriété 5 (Caractérisation de la borne inférieure).

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X \subset \mathbb{R}$ tel que X admet une borne inférieure.

$$a = inf(X) \text{ ssi } \forall x \in X,\ a \leq x \text{ et } \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in X,\ a + \epsilon > x.$$

Voir remarque 14 pour une caractérisation séquentielle des bornes inf et sup.

► Exemple : Soit $X = [1, 2[$. Montrer que $\sup(X)$ existe et vaut 2.

► Exemple : Soient X et Y deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$.

Propriété 6.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $(\forall \epsilon > 0,\ |a| \leq \epsilon)$ alors $a = 0$.

Démonstration : la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$ est 0 donc si un réel a est tel que $\forall \epsilon > 0,\ |a| \leq \epsilon$, on peut affirmer que $|a|$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$ et donc $|a| \leq 0$.

1.3 Droite $\bar{\mathbb{R}}$

Définition 5 (Droite numérique achevée).

On appelle ***droite numérique achevée*** *l'ensemble :*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Propriété 7 (Relation d'ordre sur $\bar{\mathbb{R}}$).

On prolonge la relation d'ordre $\leq$ sur $\bar{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \bar{\mathbb{R}},\ -\infty \leq x \leq +\infty.$$

Par convention, on pose $\sup X = +\infty$ si X est une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et $\inf X = -\infty$ si X est une partie non minorée de $\mathbb{R}$.

Propriété 8 (Opérations + et × sur $\bar{\mathbb{R}}$).

On peut prolonger partiellement les opérations + et × sur $\bar{\mathbb{R}}$ (voir tableaux suivants. On notera f.i. pour ***forme indéterminée*** *dans le cas où l'opération n'est pas définie.*

Opération +	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$			
$x \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			

Opération ×	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$					
$x \in \mathbb{R}_-^*$					
0					
$x \in \mathbb{R}_+^*$					
$+\infty$					

1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 6 (Intervalle de $\mathbb{R}$).

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous $a,\ b \in X$, on a $[a, b] \subset X$.

1.5 Approximations décimales

Soit x un réel et n un entier naturel, l'entier $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ est l'unique entier qui vérifie

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{1+p_n}{10^n}.$$

On a besoin de la propriété d'Archimède pour affirmer l'existence de p_n (P30).

Définition 7.

Les rationnels $\dfrac{p_n}{10^n}$ et $\dfrac{1+p_n}{10^n}$ sont appelés ***valeurs décimales approchées*** *de x à 10^{-n} près respectivement* ***par défaut*** *et* ***par excès****. c*

► Exemples :Valeurs décimales approchées par défaut et par excès à 10^{-4} près de $\sqrt{2}$, à 10^{-6} près de e, à 10^{-8} près de π.

Propriété 9 (Suites des approximations décimales par excès et par défaut).

Etant donné un réel x, on définit :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = p_n 10^{-n}$ (valeur approchée à 10^{-n} près par défaut de x) et $v_n = (1+p_n)10^{-n}$ (valeur approchée à 10^{-n} près par excès de x).
Les suites u et v sont convergent vers x.

La compréhension de la démonstration de cette propriété nécessite la notion de suites adjacentes, voir paragraphe ultérieur.

Remarque 3. *Lorsque x est irrationnel, les suites u et v sont des suites de nombres rationnels qui convergent vers un nombre irrationnel, donc qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$.*

Propriété 10 (Corollaire).

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

2 Suites de nombres réels

Définition 8.

On appelle ***suite numérique*** *une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si u est une telle famille, on note u_n à la place de $u(n)$ l'image de l'élément $n \in \mathbb{N}$ par u. La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Remarque 4.
- *Une famille de réels indexée par $\mathbb{N}^*$ ou par un intervalle entier du type $[[n_0, +\infty[[$ est aussi appelé suite, par extension. On revient au cas des suites définies sur $\mathbb{N}$ par le changement d'indice $p = n - n_0$.*
- *Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sera notée au choix u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suivant qu'on la conçoit comme application ou comme famille. On peut aussi utiliser la notation (u_n). Ne pas confondre la suite et son terme général u_n qui est un nombre réel.*

Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie

- **de façon explicite** : par la donnée d'une formule explicite de u_n en fonction de n.
  ▶ Exemple : : $u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,
- **de façon implicite** : comme solution d'une équation qui dépennd de n.
  ▶ Exemple : : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est la solution de l'équation $x^5 + nx - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- **par récurrence** : par la donnée des k premiers termes de la suite et d'une relation de récurrence qui relie u_n avec les k termes précédents. On dit alors que u_k est une suite récurrente d'ordre k.
  ▶ Exemples : :
  - La suite définie par le premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n + 7$ est une suite récurrente d'ordre 1,
  - La suite définie par les premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente d'ordre 2 célèbre...

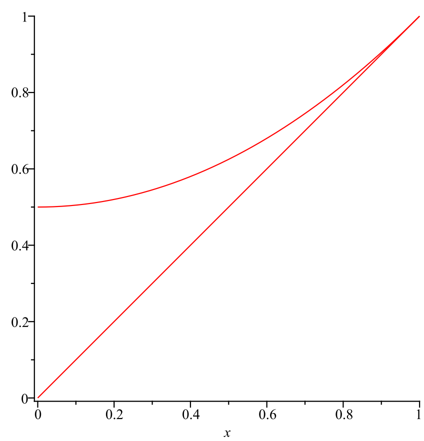
Attention, il faut toujours vérifier qu'une suite donnée par récurrence ou de façon implicite est bien définie. Par exemple il n'existe pas de suite définie par $u_0 = \frac{-3}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$. La propriété suivante est très utile pour montrer qu'une suite récurrente est bien définie.

Propriété 11 (Existence et unicité d'une suite définie par une relation de récurrence simple).

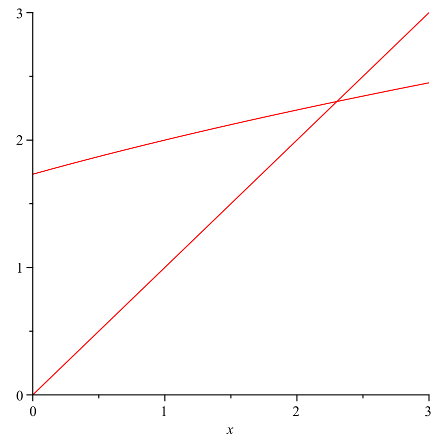
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. On suppose que A est stable par f, c'est-à-dire que $f(A) \subset A$, ou encore que $\forall x \in A, f(x) \in A$. Il existe une unique suite telle que $u_0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.

▶ Méthode : Pour représenter la suite récurrente d'ordre 1 définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par le premier terme u_0, on trace la courbe de f et la première bissectrice, puis on place en abscisse u_0.

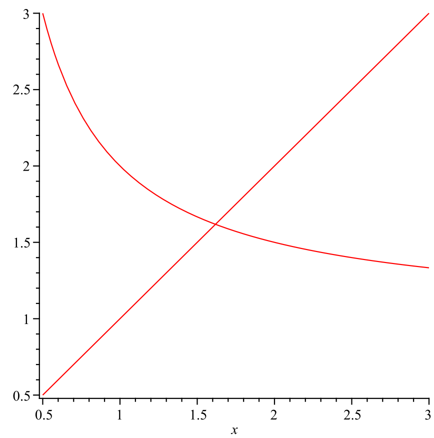
▶ Exemple : : Représenter graphiquement la suite (u_n) définie par $\begin{cases} 0 < u_0 < 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$



▶ Exemple : : Représenter graphiquement la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \end{cases}$



► Exemple : : Représenter graphiquement la suite (u_n) définie par $\begin{cases} 0 < u_0 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$



Définition 9 (Suites constantes, stationnaires, périodiques).

Une suite numérique u est dite ***constante*** *si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.*
Une suite numérique u est dite ***stationnaire*** *si elles est constante à partir d'un certain rang p, c'est-à-dire si $\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_{n+1} = u_n$.*
Une suite numérique u est dite ***périodique*** *si $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+N} = u_n$.*

Définition 10 (Suites majorées, minorées. Suites bornées).

Une suite numérique u est dite ***majorée*** *si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.*
Une suite numérique u est dite ***minorée*** *si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.*
Une suite numérique u est dite ***bornée*** *si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.*

Montrer qu'une suite u est bornée revient donc à trouver une constante M telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

► Exemple : Montrer que la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ est bornée.

Propriété 12 (Ensemble des suites bornées).

L'ensemble des suites bornées se note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cet ensemble est stable par combinaison linéaire et par produit.

Définition 11 (Suites monotones, strictement monotones).

Une suite numérique u est dite ***croissante*** *(respectivement strictement croissante) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$).*
Une suite numérique u est dite ***décroissante*** *(respectivement strictement croissante) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ (respectivement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$).*
Une suite numérique u est dite ***monotone*** *(respectivement strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).*

► Méthode : Pour montrer qu'une suite u est croissante :
- on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$,
- si on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (ce deuxième cas est intéressant si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par un produit)

► Exemple : Etudier la monotonie de u définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

► Exemple : Montrer que la suite u, définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 - 8n$ est croissante à partir du rang 4.

Remarque 5.
- *Les suites constantes sont les seules suites à la fois croissantes et décroissantes.*
- *La suite u définie par $u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ est croissante mais pas strictement croissante.*

► Exemple : Que peut-on dire de l'opposé d'une suite croissante ? de la somme de deux suites croissantes ? du produit de deux suites croissantes ? de l'inverse d'un suite croissante ?

3 Limite d'une suite

En classe de Terminale, on a donné la définition suivante : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 qaund n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant 0 contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Définition 12 (Suite convergente vers 0).

On dit que la suite u converge vers 0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \epsilon$$

► Exemple : Montrer que la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ converge vers 0.
► Exemple : Montrer que si $|a| < 1$, la suite u définie par $u_n = a^n$ converge vers 0.
► Exemple : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

Définition 13 (Suites convergentes, divergentes).

On dit que la suite u est convergente s'il existe un réel l tel que la suite $u - l$ converge vers 0. Ce réel l est unique. On l'appelle ***limite*** *de u et on note : $\boxed{l = \lim u \text{ ou } l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$. On dit que u converge vers l.*

La convergence de la suite u s'écrit :

$$\exists l \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

► Exemple : Montrer que si $|a| < 1$, une suite u qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$ est convergente.
Rappel : Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Propriété 13.

Soient u une suite numérique et l un réel. S'il existe v convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq v_n$, alors u converge vers l.

Propriété 14.

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors la suite $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Remarque 6. *La réciproque est fausse : penser à la suite définie par $u_n = (-1)^n$.*

Propriété 15.

Toute suite convergente est bornée.

Remarque 7. *Cela signifie que l'ensemble des suites convergentes est inclus dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
Toute suite non bornée ne peut pas être convergente : par exemple la suite définie par $u_n = n$.

Propriété 16.

Soit m un réel et u une suite convergeant vers une limite $l > m$. Alors la suite u est minorée par m à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq m$.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $l > 0$ est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.

► Exemple : Soit u une suite numérique convergeant vers une limite $l \neq 0$. Appliquer le second résultat à la suite $|u|$.
En classe de Terminale, on a donné la définition suivante : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Définition 14 (Suites tendant vers l'infini).

On dit que u tend vers $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A.$$

On dit que u tend vers $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) si

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq B.$$

► Exemple : Montrer que la suite u définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$.
► Exemple : Montrer que si $a > 1$, la suite u définie par $u_n = a^n$ tend vers $+\infty$.
► Exemple : Montrer que toute suite u qui tend vers $+\infty$ est minorée.

Remarque 8.
- *Si u tend vers $+\infty$ alors $-u$ tend vers $-\infty$.*
- *Si u tend vers $\pm\infty$ alors $|u|$ tend vers $+\infty$. Réciproque fausse (penser à $u_n = (-n)^n$).*

4 Opérations sur les limites

Propriété 17 (Opérations sur les suites tendant vers 0).

- *La somme de deux suites tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.*
- *Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.*

Propriété 18 (Combinaison linéaire de suites convergentes).

Etant données deux suites u et v convergeant respectivement vers l_1 et l_2 et deux réels λ et μ, la suite $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda l_1 + \mu l_2$. On en déduit que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque 9. *La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente. Raisonner par l'absurde.*

Propriété 19 (Produit de suites convergentes).

Etant données deux suites u et v convergeant respectivement vers l_1 et l_2, la suite uv converge vers $l_1 l_2$.

Propriété 20 (Opérations sur les suites tendant vers l'infini).

Soit u une suite tendant vers $+\infty$.

1. *Si v est une suite minorée alors $u+v$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si v est une suite minorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif, alors uv tend vers $+\infty$.*

Propriété 21.

Soient u et v deux suites réelles admettant des limites l_1 et l_2 dans $\bar{\mathbb{R}}$.
Si la forme $l_1 + l_2$ n'est pas indéterminée alors $\lim(u+v) = l_1 + l_2$.
Si la forme $l_1 l_2$ n'est pas indéterminée alors $\lim(uv) = l_1 l_2$.
Mais attention, on ne peut rien dire de la somme de deux suites qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$, ni du produit d'une suite qui tend vers l'infini et d'une suite convergeant vers 0.

► Exemple : Etude de la convergence de la suite u définie de la façon suivante :

1. $u_n = (1 - \frac{1}{n}) \ln(\frac{1}{n})$
2. $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a > 1$
3. $u_n = (n + \frac{1}{n})^2 - n^2$

Propriété 22 (Inverse d'une suite convergente).

Si u est une suite convergeant vers une limite $l \neq 0$, alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont non nuls et la suite $(1/u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $1/l$.

Propriété 23.

Soit u une suite divergeant vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang n_0, tous les u_n sont strictement positifs et la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

Propriété 24.

Soit u une suite convergeant vers 0 dont tous les termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang n_0. Alors $(1/u_n)_{n \geq n_0}$ tend vers $+\infty$.
Soit u une suite convergeant vers 0 dont tous les termes sont strictement négatifs à partir d'un certain rang n_0. Alors $(1/u_n)_{n \geq n_0}$ tend vers $-\infty$.

Remarque 10. *Attention, l'inverse d'une suite à termes non nuls convergeant vers 0 ne tend pas forcément vers $\pm\infty$. Par exemple, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.*

Pour signifier que la suite u tend vers 0 et a tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang, on écrit $\lim u = 0^+$. En utilisant les résultats sur inverse et produit, on peut donner les résultats sur le quotient de deux suites : si u et v sont des suites admettant pour limites respectives $l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ et $l_2 \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty, 0^+, 0^-\}$ alors u/v admet $l_1 l_2$ pour limite s'il n'y a pas une des formes indéterminées suivantes : $0/0^{\pm}$ ou $\pm\infty / \pm\infty$.

Propriété 25 (Stabilité des inégalités larges par passage à la limite).

Soient u et v deux suites convergentes.

1. *S'il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq 0$, alors $\lim u \geq 0$.*
2. *S'il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq v_n$, alors $\lim u \geq \lim v$.*

Attention le résultat précédent ne peut pas être amélioré en utilisant une inégalité stricte. Par exemple prendre $u_n = \frac{1}{n}$.

5 Conditions suffisantes de convergence et de divergence pour les suites numériques

5.1 Suites monotones

Théorème 1 (Théorème de la limite monotone).

1. *Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure :* $\sup(\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\})$
2. *Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure :* $\inf(\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\})$

Remarque 11. *Toute suite stationnaire est convergente.*

► Exemple : Etudier la convergence de la suite u définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ avec $n \geq 1$.

Théorème 2.

1. *Toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers* $+\infty$*.*
2. *Toute suite réelle décroissante et non minorée diverge vers* $-\infty$*.*

Remarque 12. *Toute suite croissante admet donc une limite dans* $\bar{\mathbb{R}}$*.*
En majorant une suite croisssante, on montre sa convergence, mais on obtient aussi un majorant de sa limite, puisque la limite est le plus petit des majorants.

5.2 Suites adjacentes

Définition 15.

Deux suites u et v réelles sont dites ***adjacentes*** *lorsque*

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$,
2. *u est croissante et v est décroissante,*
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

► Exemple : Montrer que les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes.

Propriété 26 (Théorème des suites adjacentes).

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

5.3 Comparaison avec d'autres suites

Théorème 3 (Théorème d'encadrement des limites).

Soient u, v, w trois suites réelles vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite l.

Propriété 27 (Théroème de divergence par minoration ou majoration).

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge également vers $+\infty$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et si à partir d'un certain rang $u_n \geqslant v_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge également vers $-\infty$.*

6 suites extraites

Définition 16 (Suites extraites).

*On dit que v est une **suite extraite**, ou **sous-suite** d'une suite u s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.*

► Exemple : La suite des termes de rangs pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (ici $\varphi : n \longmapsto 2n$) et la suite des termes de rangs impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (là $\varphi : n \longmapsto 2n+1$) sont deux suites extraites de la suite u.

Propriété 28.

Toute suite extraite d'une suite convergeant vers a converge vers a.

Remarque 13.

1. *La réciproque est fausse. Par exemple : $((-1)^n)$ dont les suites extraites de rangs pairs et impairs convergent, diverge.*
2. *On utilise surtout ce résultat pour montrer qu'une suite u diverge : on exhibe deux suites extraites de limites différentes. Par exemple : $\left(\cos \dfrac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puisque $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ en est une suite extraite divergente.*
   Autre exemple : $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a \leq -1$.

Propriété 29.

Si u est une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite l, alors u converge vers l.

Revenir à la démonstration de P9.

Théorème 4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass).

Toute suite de réels bornée admet une suite extraite convergente.

7 Traduction séquentielle de certaines propriétés

7.1 Propriété d'Archimède

Propriété 30 (Propriété d'Archimède).

*$\mathbb{R}$ est **archimédien**, ce qui signifie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ nx \geq y.$$

7.2 Parties denses de $\mathbb{R}$

Définition 17.

*Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est **dense dans** $\mathbb{R}$ lorsque :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow [x,y] \cap A \neq \emptyset$$

$$\text{c'est-à-dire } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists z \in A,\ x \leq z \leq y$$

Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout segment non vide.
► Exemple : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors que $[0,1]$ pas. $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Propriété 31.

Etant donnés deux réels x et y vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $[x,y]$. Autrement dit $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Propriété 32 (Caractérisation séquentielle de la densité).

Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout x réel on peut trouver une suite d'éléments de A qui converge vers x.

A est dense dans $\mathbb{R}$ si on peut trouver un élément de A aussi proche qu'on le souhaite de n'importe quel réel x.

7.3 Partie non vide de $\mathbb{R}$

Propriété 33.

Si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$.
Si X est une partie non vide non majorée de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite d'éléments de X de limite $+\infty$.
Si X est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\inf X$.
Si X est une partie non vide non minorée de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite d'éléments de X de limite $-\infty$.

Remarque 14. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et X une partie de $\mathbb{R}$ qui admet une borne sup et une borne inf.*
On peut montrer que $s = sup(X)$ ssi il existe une suite d'éléments de X de limite s et s est un majorant de X (caractérisation séquentielle de la borne sup).
On peut montrer que $s = inf(X)$ ssi il existe une suite d'éléments de X de limite s et s est un minorant de X (caractérisation séquentielle de la borne inf).

8 Suites particulières

8.1 Suites récurrentes d'ordre 1

On montre par récurrence la propriété suivante :

Propriété 34.

Soit f une application définie sur un intervalle A telle que $f(A) \subset A$. Soit u la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in A$.

1. *si f est croissante sur A alors (u_n) est monotone.*
2. *si f est décroissante sur A alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire.*

Pour montrer le second point, on remarquera que si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante.
Rappel de terminale : Soit f une application définie **et continue** sur un intervalle A telle que $f(A) \subset A$. Soit u la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in A$. **Si** u converge vers $\ell \in A$, **alors** ℓ est solution dans A de l'équation $f(x) = x$. On dit que ℓ est un point fixe de f.

► Exemple : Etudier la monotonie et préciser si les suites suivantes sont bornées :

— $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$

— $\begin{cases} 0 < u_0 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

— $\begin{cases} 0 < u_0 < 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On retient que dans le cas général, on ne peut pas exprimer le terme général d'une suite récurrente d'ordre 1 en fonction de n. L'étude de la suite s'effectue en utilisant les propriétés de la fonction f.

Dans les autres types de suites de référence que nous allons examiner maintenant (suites récurrentes doubles, suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques), il est possible d'exprimer le terme général de la suite en fonction de n. Les résultats et méthodes de calcul doivent être connus de vous.

8.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 18 (Suites arithmétiques).

On appelle suite arithmétique de raison r toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.

Définition 19 (Suites géométriques).

On appelle suite géométrique de raison q toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.

Définition 20 (Suites arithmético-géométriques).

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$, *avec* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

▶ Méthode : pour calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique dans le cas où $a \neq 1$.

1. On résout l'équation $x = ax + b$. L'unique solution est $c = \dfrac{b}{1-a}$.
2. On montre que la suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.
3. On en déduit l'expression du terme général de $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir définition précédente).
4. On en déduit enfin l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▶ Exemple : Calculer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 6$.

8.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème 5.

Soit u telle que $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, avec $b \neq 0$

1. *Si $x^2 + ax + b = 0$ admet une racine double r, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$*
2. *Si $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$;*
3. *Si les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ sont complexes conjuguées, alors $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et il existe A, B réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$*

Les scalaires λ, μ, A et B sont à déterminer à l'aide des deux premiers termes de la suite u_0 et u_1.

La démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire.
▶ Exemple : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$; $u_0 = u_1 = 1$; on trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.
▶ Exemple : Suite de Fibonacci : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$; $u_0 = u_1 = 1$; on trouve $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$.

9 Brève extension aux suites complexes

Définition 21.

On appelle ***suite complexe*** *une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.*
On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs complexes.

Remarque 15. *Les définitions de suites constante, stationnaire, bornée, périodique, extraite sont les mêmes pour les suites réelles et complexes. En revanche, les qualificatifs "minorée, majorée, croissante, décroissante, monotone" n'ont pas de sens pour une suite complexe.*

Définition 22.

Si u appartient à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que la suite réelle $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
*Le complexe l est unique, on l'appelle **limite** de la suite u.*
On dit aussi que u converge vers l.

Remarque 16. *La démonstration de l'unicité de l est la même dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.*

► Exemple : La suite u définie par $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$ converge vers 0.
► Exemple : La suite v définie par $v_n = a^n$, où a est un complexe de module strictement inférieur à 1, converge vers 0.

Propriété 35.

Toute suite convergente est bornée.

Remarque 17. *La démonstration est la même dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.*

Propriété 36 (Lien entre suites complexes et suites réelles).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
u converge dans $\mathbb{C}$ ssi Reu et Imu convergent dans $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Re(u_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} Im(u_n)$.

► Exemple : Etude de la convergence de u définie par $u_n = (1+\dfrac{1}{2^n}) + i(2+\dfrac{1}{n})$?
► Exemple : Etude de la convergence de u définie par $u_n = 1 + ni$?
► Exemple : Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes de limites respectives r et θ alors $(r_n e^{i\theta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $re^{i\theta}$. La réciproque est fausse : on peut avoir $(r_n e^{i\theta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge sans que ce soit le cas pour $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prendre par exemple $r_n = (-1)^n$ et $\theta_n = n\pi$.

Propriété 37.

Si u est une suite convergeant vers $l \in \mathbb{C}$ alors $|u|$ converge vers $|l|$ (Réciproque fausse : prendre u définie par $u_n = e^{\frac{ni\pi}{4}}$).
Si u est une suite convergeant vers $l \in \mathbb{C}$ alors $\bar{u}$ converge vers $\bar{l}$.

Démonstration :
1. La démonstration est la même dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$: $0 \leq ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$.
2. $|\bar{u_n} - \bar{l}| = |u_n - l|$.

Propriété 38 (Suites extraites).

Les résultats concernant les suites extraites sont les mêmes sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

► Exemple : Montrer que u définie par $u_n = e^{\frac{ni\pi}{2}}$ ne converge pas en étudiant la convergence de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$) et $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$).

Propriété 39 (Ensemble des suites complexes convergentes).

Soient deux suites complexes u et v convergeant respectivement vers l_1 et l_2 et deux complexes λ et μ.
La suite $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda l_1 + \mu l_2$. On en déduit que l'ensemble des suites complexes convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{C})$.
La suite uv converge vers $l_1 l_2$.

Propriété 40 (Inverse d'une suite complexe convergeant vers une limite non nulle).

Si u est une suite complexe convergeant vers une limite $l \neq 0$, alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont non nuls et la suite $(1/u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $1/l$.

Démonstration : On applique le résultat de la propriété 16 sur les suites réelles à la suite $|u|$ pour justifier l'existence de n_0. Ensuite, pour $n \geq n_0$, on écrit $\frac{1}{u_n} = \frac{\bar{u_n}}{|u_n|^2}$. Les résultats sur les suites réelles permettent d'affirmer que $\frac{1}{|u|^2}$ converge $\frac{1}{|l|^2}$ puis que $(\frac{\bar{u_n}}{|u_n|^2})_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{\bar{l}}{|l|^2} = \frac{1}{l}$.

Propriété 41 (Corollaire : quotient de deux suites).

Soient u une suite complexe convergente de limite l_1 et v une suite convergeant vers une limite l_2 non nulle. Alors il existe un rang n_0 à partir duquel la suite v ne s'annule plus et la suite $\frac{u}{v}$ converge vers $\frac{l_1}{l_2}$.

Théorème 6 (Théorème de Bolzano-Weierstrass).

Toute suite de complexes bornée admet une suite extraite convergente.

Théorème 7.

Soit u telle que $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, avec $b \neq 0$

1. *Si $x^2 + ax + b = 0$ admet une racine double r, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$*
2. *Si $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$*

Les scalaires λ, μ, A et B sont à déterminer à l'aide des deux premiers termes de la suite u_0 et u_1.