CORRECTION DU DS 4, FAIT LE 24/11/23

EXERCICE 1 : bonus +1 pr convexité

1. • Ensemble de définition : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*}$ /0,5 $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{x^2 \ln x}$ /0,5

3

• f est <u>dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$</u> /0,5 en tant que composée des fonctions : /0,5
- exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $x \mapsto x^2 \ln x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que produit de la fonction carrée et de la fonction ln, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = e^{x^2 \ln x} \cdot \left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x^2 \ln x}(2x\ln x + x)$ /1 $= \boxed{x e^{x^2 \ln x}(2\ln x + 1)}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x > 0,\ e^{x^2 \ln x} > 0.$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de l'expression $2\ln x + 1$.

Or $2\ln x + 1 > 0$ ssi $2\ln x > -1$ ssi $\ln x > -\frac{1}{2}$ ssi $x > e^{-\frac{1}{2}}$.

• On obtient donc le tableau de variations suivant :

2

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1 /0,5	$\searrow$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	$\nearrow$	$+\infty$ /0,5

/0,5

$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2 \ln x} = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} e^{x^2 \ln x} = 1$ par CC, /0,5 car $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$ et exp est continue en 0.

1,5

• <u>Étude de la branche infinie en $+\infty$</u>

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ /0,5 $= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} e^{(x^2-1)\ln x} = +\infty$ /0,5

car $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1)\ln x = +\infty$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc en $+\infty$ une <u>branche parabolique de direction asymptotique (Oy)</u>. /0,5 0 si pas bien exprimé

• <u>Prolongement par continuité</u> : puisque $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, on peut prolonger f par continuité en 0.

0,5 Soit $\tilde{f}$ ce prolongement. $\tilde{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(0) = 1$.

$\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0^+ ?

1,5

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0}$ /0,5 $= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2 \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2 \ln x} - 1}{x^2 \ln x} \cdot \frac{x^2 \ln x}{x}$ /0,5

or $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2 \ln x} - 1}{x^2 \ln x} = 1$

De plus $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = 1 \times 0 = 0$, $\tilde{f}$ est dérivable en 0^+

0,5

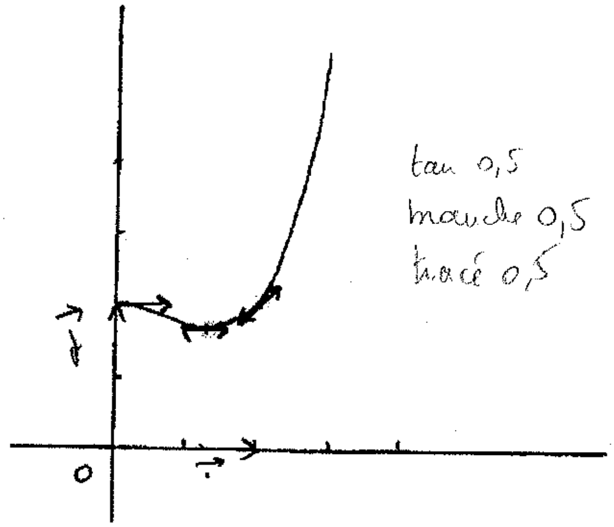
La demi-tangente en 0^+ est horizontale. /0,5

2

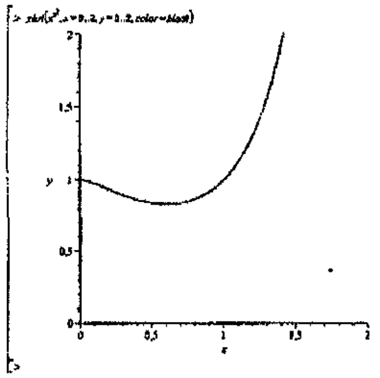
- Equation des tangentes :
  - Comme $f'(e^{-\frac{1}{2}}) = 0$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{2}}$ est horizontale. /0,5
  - $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$ donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(1,1)$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1 + 1$ /0,5
    soit $y = x$ /0,5

- Tracé de la courbe

1,5



tan 0,5
manche 0,5
tracé 0,5



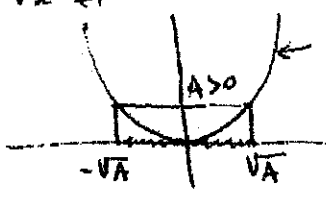
Soit $x \in \mathbb{R}$

② ⓐ on cherche à déterminer x tel que $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ -1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \end{cases}$ 0,5

$x^2+1>0$ est vrai pour tout x réel.

$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$ ssi $-\sqrt{x^2+1} \leq x \leq \sqrt{x^2+1}$ ssi $x^2 \leq x^2+1$ ce qui est toujours vrai. 0,5

1,5



← courbe représentative de $x \longmapsto x^2$

$\boxed{\begin{array}{l} -\sqrt{A} \leq x \leq \sqrt{A} \\ \text{ssi } x^2 \leq A \end{array}}$

Concl. $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$ 0,5

ⓑ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables. /0,5

0,5
- $x \mapsto \arcsin x$, dérivable sur $]-1,1[$
- $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

(on a : $x^2 < x^2+1$ ssi $-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$ ssi $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

0,5 0,5

③

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} \times \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}}} \times \frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}} \times \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \qquad 0,5$$

$$= \sqrt{x^2+1} \times \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^2+1} \qquad 0,5$$

$$= \arctan'(x).$$

ⓒ On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x) + \text{cste}$ /0,5

①

or $f(0) = \arcsin 0 = 0$ donc $\text{cste} = 0$ /0,5

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(x)}$$

Remarque : autre méthode

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sin(\arctan x)$

donc $f(x) = \arcsin(\sin(\arctan x)) = \arctan x$

puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Concl. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x}$

Exercice 2

1) a) -1 est une racine réelle évidente de (E) : $(-1)^3-2(-1)^2-i(-1)+3-i = -1-2+i+3-i=0$

0,5 b) $z^3-2z^2-iz+3-i=(z+1)(z^2-az+b)$ ssi $z^3-2z^2-iz+3-i=z^3-az^2+bz+z^2-az+b$

ssi $z^2(-2+a-1)+z(-i-b+a)+3-i-b=0$

1,5 +0,5 (J)

ssi $\begin{cases} a-3=0 \\ a-b=i \\ b=3-i \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \boxed{a=3} \\ \boxed{b=3-i} \end{cases}$ 2×0,5

c) On cherche $(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x+iy)^2=4i-3$ ssi $x^2-y^2+2xiy=4i-3$

ssi $\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=\sqrt{4^2+(-3)^2} \end{cases}$ 1,5 ssi $\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ xy=2 \\ x^2+y^2=\sqrt{25}=5 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x^2=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1 \\ y^2=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4 \\ xy=2 \end{cases}$

2,5 ssi $\begin{cases} x=1 \text{ ou } -1 \\ y=2 \text{ ou } -2 \\ xy \text{ est positif} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=1 \text{ et } y=2 \\ x=-1 \text{ et } y=-2 \end{cases}$

Les racines carrées de $4i-3$ sont : $\boxed{1+2i \text{ et } -1-2i}$ 2×0,5

d) $z^2-3z+3-i=0$ $\quad \Delta=9-4(3-i)=9-12+4i=-3+4i=(1+2i)^2$ 0,5

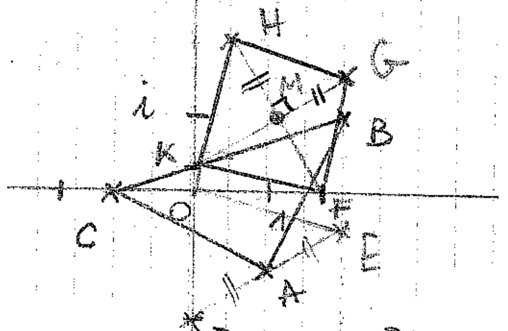
2 $z_1=\frac{3+(1+2i)}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$ et $z_2=\frac{3-(1+2i)}{2}=\frac{2-2i}{2}=1-i$

L'équation $z^2-3z+3-i=0$ admet 2 solutions : $2+i$ et $1-i$.

Les 3 solutions de (E) sont : -1, $2+i$ et $1-i$. 0,5 2×0,5

2) a)

0,5



A, B, C, D : 0,5 $\quad$ E symé de D / A

$\left.\begin{matrix} D\to F \\ E\to H \end{matrix}\right| r(O,\frac{\pi}{2})$. $\quad \left.\begin{matrix} D\to K \\ E\to G \end{matrix}\right) t_{\vec{u}}$ $\quad \vec{u}=2i$

b) D'une part, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg\left(\frac{-1-(1-i)}{2+i-(1-i)}\right)=\arg\left(\frac{-2+i}{1+2i}\right)=\arg\left(\frac{(-2+i)(1-2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right)=\arg\left(\frac{\cancel{-2}+4i+i\cancel{+2}}{1+4}\right)$

1 $=\arg\left(\frac{5i}{5}\right)=\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ donc ABC est rectangle en A

0,5 D'autre part, $AB=|b-a|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ et $AC=|c-a|=|-2+i|=\sqrt{5}$

1,5 donc $AB=AC$ et ABC est isocèle en A $\quad BC=|2+i+1|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

Conclusion ABC est rectangle isocèle en A.

0,5 c) L'affixe du centre de gravité de ABC est $\frac{1}{3}(a+b+c)=\frac{1}{3}(1-i+2+i-1)=\boxed{\frac{2}{3}}$.

1 d) $a=\frac{1}{2}(e+d)$ d'où $e=2a-d=2(1-i)-(-i\sqrt{3})=2-2i+i\sqrt{3}=\boxed{2+i(\sqrt{3}-2)}$, 0,5

e) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z'-z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_0)$ 0,5

2 or $z_0=0$ donc l'écriture est : $z'=iz$. (1)

Ainsi, $f=id=i(-i\sqrt{3})=\boxed{\sqrt{3}}$ 0,5 et $h=ie=i(2+i(\sqrt{3}-2))=\boxed{2-\sqrt{3}+2i}$. 0,5

f) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ a pour écriture complexe $z'=z+2i$ 0,5

1,5 donc $k=d+2i=-i\sqrt{3}+2i=\boxed{i(2-\sqrt{3})}$ et $g=e+2i=\boxed{2+i\sqrt{3}}$ 2×0,5

g) le milieu de [KG] a pour affixe $\frac{1}{2}(k+g)=\frac{1}{2}(i(2-\sqrt{3})+2+i\sqrt{3})$

$=\frac{1}{2}(2+2i)=1+i$ 0,5

1 le milieu de [FH] a pour affixe $\frac{1}{2}(f+h)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2i)=\frac{1}{2}(2+2i)=1+i$

(h) donc [KG] et [FH] ont même milieu M d'affixe $m=1+i$ 0,5

1 $\frac{h-m}{g-m} = \frac{2-\sqrt{3}+2i-1-i}{2+i\sqrt{3}-1-i} = \frac{(1-\sqrt{3})+i}{1+i(\sqrt{3}-1)} = \frac{((1-\sqrt{3})+i)(1-i(\sqrt{3}-1))}{(1+i(\sqrt{3}-1))(1-i(\sqrt{3}-1))}$

$= \frac{\cancel{1-\sqrt{3}}+i(1-\sqrt{3})^2+i+\cancel{\sqrt{3}-1}}{1+(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{i(1+3-2\sqrt{3})+i}{1+3+1-2\sqrt{3}} = i\,\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} = \boxed{i}$

(i) On en déduit que $\left|\frac{h-m}{g-m}\right|=|i|=1$ donc $|h-m|=|g-m|$ et $MH=MG$,

et que $(\overrightarrow{MG},\overrightarrow{MH})=\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ 0,5 donc MGH est rectangle en M 0,5

2 Le quadrilatère FGHK est un parallélogramme (puisque ses diagonales se coupent en leur milieu) d'après (g) 0,5 et d'après (h) c'est un carré car les diagonales sont perpendiculaires et ont la même longueur.

Exercice 3 :

① ⓐ $1-ix=0$ ssi $1=ix$ ssi $x=\frac{1}{i}=-i$ $0,5$ or $x\in\mathbb{R}$ donc $x\neq -i$ $0,5$

1 Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $1-ix\neq 0$ et f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

ⓑ Soit $x\in\mathbb{R}$. $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\frac{1+ix}{1-ix}\in\mathbb{R}$

or $\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{(1+ix)^2}{(1+ix)(1-ix)}\overset{0,5}{=}\frac{1-x^2+2ix}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\,\frac{2x}{1+x^2}$ $0,5$

1,5 donc $\frac{1+ix}{1-ix}\in\mathbb{R}$ ssi $\frac{2x}{1+x^2}=0$ ssi $x=0$ $0,5$

et $\boxed{\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)\in\mathbb{R}\}=\{0\}}$

0,5 ⓒ Soit $x\in\mathbb{R}$ $|f(x)|=\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|=\frac{|1+ix|}{|1-ix|}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(-x)^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=1.$

ⓓ Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. $f(x)=z$ ssi $\frac{1+ix}{1-ix}=z$ ssi $1+ix=(1-ix)z$ $0,5$

ssi $1+ix=z-ixz$

1 ssi $x(i+iz)=z-1$ ssi $x=\frac{z-1}{i+iz}$ $0,5$

ssi $\boxed{x=\frac{-iz+i}{1+z}}$

ⓔ Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $|z|=1$

$x=-i\,\frac{(z-1)}{z+1}$ d'où $\bar{x}=\overline{\frac{-i(z-1)}{z+1}}=\overline{-i}\ \overline{\frac{z-1}{z+1}}=i\,\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$ $0,5$

1,5 Comme $|z|=1$, $\bar{z}=\frac{1}{z}$ $0,5$ donc $\bar{x}=i\,\frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1}=i\,\frac{z(\frac{1}{z}-1)}{z(\frac{1}{z}+1)}=i\,\frac{(1-z)}{1+z}=x$ $0,5$

or $x=\bar{x}$ ssi $x\in\mathbb{R}$

donc x est réel.

② Soit $x,x'\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=f(x')$. $0,5$

$f(x)=f(x')$ ssi $\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{1+ix'}{1-ix'}$ ssi $(1+ix)(1-ix')=(1+ix')(1-ix)$ $0,5$

1,5 ssi $1-ix'+ix+xx'=1-ix+ix'+xx'$

ssi $x'(-i-i)=x(-i-i)$ ssi $-2ix'=-2ix$

Donc f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. ssi $x=x'$. $0,5$

③ -1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$. En effet, supposons qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=-1$. Alors $\frac{1+ix}{1-ix}=-1$ ssi $1+ix=-1+ix$

1 $0,5+0,5$ ⓙ ssi $1=-1$ absurde

Donc f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1 ④ $f^{-1}(\mathbb{R})=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)\in\mathbb{R}\}=\{0\}$ d'après ①ⓑ

⑤ $f(\mathbb{R})=\{f(x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$. $0,5$ $0,5$ $0,5$

• Montrons que $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{U}\setminus\{-1\}$.

2,5

1 Soit $y\in f(\mathbb{R})$. Alors $\exists x\in\mathbb{R}\ /\ y=f(x)$. D'après ①ⓒ, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|=1$ donc $|y|=1$ et $y\in\mathbb{U}$ et $y\neq -1$ car $-1\notin f(\mathbb{R})$ d'après ③. donc $y\in\mathbb{U}\setminus\{-1\}$ et $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{U}\setminus\{-1\}$.

• Montrons que $\mathbb{U}\setminus\{-1\}\subset f(\mathbb{R})$

1 Soit $z\in\mathbb{U}\setminus\{-1\}$ alors d'après ①ⓔ $\exists x=\frac{-iz+i}{1+z}\in\mathbb{R}\ /\ z=f(x)$ donc $z\in f(\mathbb{R})$ et $\mathbb{U}\setminus\{-1\}\subset f(\mathbb{R})$.

Conclusion : $f(\mathbb{R})=\mathbb{U}\setminus\{-1\}$

⑥ Soit $x \in \mathbb{R}$

D'après ①ⓑ, $\boxed{\mathrm{Re} f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ et } \mathrm{Im} f(x) = \frac{2x}{1+x^2}}$, 0,5

Ref et Imf sont donc des fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et 0,5

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re} f'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ 0,5

1,5

$\mathrm{Im} f'(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 2\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

Comme Ref et Imf sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f aussi et 0,5

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{Re} f'(x) + i \,\mathrm{Im} f'(x) = \boxed{\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} + 2i \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = f'(x)}$

0,5

Question de cours

$\mathcal{D}_{\mathrm{Arctan}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

---

⑥ autre méthode

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de 2 fonctions

0,5 dérivables sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{i(1-ix) - (-i)(1+ix)}{(1-ix)^2} = \dfrac{i + x + i - x}{(1-ix)^2}$, 0,5

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{2i}{(1-ix)^2}$ 0,5 $= \dfrac{2i(1+ix)^2}{(1-ix)^2(1+ix)^2} = \dfrac{2i(1+2ix-x^2)}{(1+x^2)^2}$

1,5

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{-4x + 2i(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$