

Exercice 7

- (1) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On pose $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(x) = y(e^t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
 z est donc, en tant que fonction composée, 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x > 0, \quad t = \ln x (\Rightarrow e^t = x)$$

Soit $x > 0$

$$y(x) = z(\ln x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x} z''(\ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} (z''(\ln x) - z'(\ln x))$$

$$y \text{ est sol de } x^2 y'' + xy' - y = x^2 \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

$$\text{ssi } \forall x > 0 \quad x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2$$

$$\text{ssi } \forall x > 0 \quad x^2 \times \frac{1}{x^2} (z''(\ln x) - z'(\ln x)) + x \frac{1}{x} z'(\ln x) - z(\ln x) = x^2$$

$$\text{ssi } \forall x > 0, \quad z''(\ln x) - z'(\ln x) + z'(\ln x) - z(\ln x) = x^2$$

$$\text{ssi } \forall x > 0 \quad z''(\ln x) - z(\ln x) = x^2$$

$$\text{ssi } \forall t \in \mathbb{R} \quad z''(t) - z(t) = e^{2t}$$

$$\text{ssi } z \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } z'' - z = e^{2t}$$

Réolvons l'éq diff du 2^d ordre $z'' - z = e^{2t}$ (E). l'éq homogène associée est (EH): $z'' - z = 0$ qui a pour eq car associée $\lambda^2 - 1 = 0$ ssi $\lambda^2 = 1$ ssi $\lambda = \pm 1$.
L'ensemble des sol de (EH) est donc $S_H = \{t \mapsto Ae^t + Be^{-t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

Cherchons une sol part de (E) sous la forme $y_p(t) = Ke^{2t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

où $K \in \mathbb{R}$. y_p est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y_p est sol de (E) ssi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 4Ke^{2t} - Ke^{2t} = e^{2t} \text{ ssi } \forall t \in \mathbb{R} \quad (3K - 1)e^{2t} = 0 \text{ ssi } \forall t \in \mathbb{R} \quad 3K - 1 = 0$$

$$\text{car } e^{2t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \text{ On propose } y_p(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$$

L'ensemble des sol de (E) est donc $S = \{t \mapsto Ae^t + Be^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

On a donc

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = Ae^t + Be^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

donc

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x > 0, \quad y(x) = Ax + \frac{B}{x} + \frac{1}{3}x^2$$

Ex 6 TDI 10

- ⑦ φ est bien 2 fois dérivable sur $]0, \pi[$.

Le reste bien par calcul.

- ② Comme $\varphi(x) = \sin x$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ on peut associer à tout $y:]0, \pi[\rightarrow \pi$, $f = \frac{y}{\varphi}$.

y en 2 fois de se 2 l'est et;

$$y' = \varphi' z + \varphi z' \quad \text{et} \quad y'' = \varphi'' z + 2 \varphi' z' + \varphi z''$$

$$y \in S_{[E,]_{0, \pi}[} \Rightarrow y:]_{0, \pi}[\rightarrow \mathbb{R} \text{ est 2 fois dér.}$$

$$x_{ij}'' + 2y' + x_{ij} = 0$$

4) $z = \frac{y}{x}$ 2 fods der er $x(\varphi z'' + 2\varphi'(z')) + 2\varphi z' = 0$

(c)  et $(\cos x) z'' + 2 \cos x z' = 0$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{y} \quad \text{et} \quad z'(x) = \frac{d}{dx} \frac{e^{\frac{1}{\sin^2 x}}}{\sin^2 x}$$

$\Rightarrow z = \frac{y}{4}$ est de la forme $z(x) = d \cotan x + p \sin]0, \pi]$

$$S(E), \mathcal{D}_0 \pi C = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_0 \pi C \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x}{x} \end{array} \right., \quad (d, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

- ③ Reel sur $[0, \pi]$:

Analyse: f auf $[0, \pi]$

f est en 0 car $\Delta \Rightarrow \lambda = 0$ et $\lim f(x) \rightarrow \mu$

donc $g(0) = \mu$

f cont en $\pi \Rightarrow f(\pi) = 0$.

$$f(x) = \mu \frac{\sin x}{x} \text{ sur }]0, \pi[\text{ et } f(0) = \mu$$

Synthèse: f est 2 fois dér en tt pt de $]0, \pi]$

~~Donc~~ elle est dér en 0 avec $f(0) = 0$.

Deuxième dér en 0: $\forall x > 0, f'(x) = \mu \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

équivalent à $-\frac{\mu x}{3}$

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} \rightarrow -\frac{\mu}{3}$$

$\Rightarrow f''(0)$ existe et vaut $-\frac{\mu}{3}$

et la rel diff est vérifiée.

OK

Sur $[0, 2\pi]$ analyse:

$$f(0) = \mu \quad f(x) = \mu \frac{\sin x}{x} \text{ pour } x \in]0, \pi]$$

$$\text{Sur }]\pi, 2\pi[, f(x) = \frac{\mu' \cos x + \mu \sin x}{x}$$

$$\text{cont en } \pi \Rightarrow \mu' = 0$$

f dér en π à droite avec $f'_d(\pi) = -\frac{\mu}{\pi}$

Comme $f'_g(\pi) = -\frac{\mu}{\pi}$, f dér en π dès que $\mu = \mu'$

et cont de f en $2\pi \Rightarrow f(2\pi) = 0$

$$f(x) = \mu \frac{\sin x}{x} \text{ sur }]0, 2\pi] \text{ et } f(0) = 0.$$

Synthèse : OK.

Ex 4 TD 10

① $\mathcal{Y}^+ = \{ \varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \mid t \mapsto \lambda t + \frac{t^3}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{Y}^- = \{ \varphi: \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R} \mid t \mapsto \mu t + \frac{t^3}{2}, \mu \in \mathbb{R} \}$

Par analyse-synthèse

analyse: Si f est sol sur $\mathbb{R}$ alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\begin{cases} \text{si } x > 0 & f(x) = \lambda t + \frac{t^3}{2} \\ \text{si } x < 0 & f(x) = \mu t + \frac{t^3}{2} \end{cases}$
 At $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ cont en } 0 \\ f \text{ est der en } 0. \end{array} \right.$

on $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ donc on pose $f(0) = 0$.

et $f'_g(0) = \mu$ et $f'_d(0) = \lambda$ donc $\lambda = \mu$.

synthèse: Vérifions si $f: t \mapsto \lambda t + \frac{t^3}{2}$ est sol de $(E) \rightarrow$ oui
 Concl

② sur $\mathbb{R}_-^*$: $-xy' + y = 1$ $\mathcal{Y} = \{ \varphi: \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \mu x + 1, \mu \in \mathbb{R} \}$

sur $\mathbb{R}_+^*$: $xy' + y = 1$ $\mathcal{Y}^+ = \{ \varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} + 1, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Par analyse-synthèse

analyse Si f est sol sur $\mathbb{R}$ alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\begin{cases} \text{si } x > 0 & f(x) = \frac{1}{x} + 1 \\ \text{si } x < 0 & f(x) = \mu x + 1 \\ f \text{ est cont en } 0 \\ f \text{ est der en } 0 \end{cases}$

or si $\lambda \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pm \infty$ donc $\lambda = 0$ pour avoir une limite finie en 0^+ .

on pose donc $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ dans le cas où $\lambda = 0$

$f'_g(0) = \mu$ et $f'_d(0) = 0$ donc $\mu = 0$

synthèse
 Concl

Vérifions si $f: t \mapsto 1$ est sol de $(E) \rightarrow$ oui

Ex 9

$$(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$$

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$y \text{ sol de (E)ssi } (1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0$$

Comme y est 2 fois dérivable, z est 1 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = y'(x) + y''(x)$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) = (1+e^x)(y'(x) + y''(x))$$

$$\text{Ainsi } y \text{ sol de (E)ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) - (1+e^x)y'(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) - e^x(y'(x) + y(x)) = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+e^x)z'(x) - e^x z(x) = 0$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) - \frac{e^x}{1+e^x} z(x) = 0$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda e^{-\int (-\ln(1+e^x)) dx}$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) + y(x) = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad y(x) = K e^{-x} + \frac{\lambda(1+e^x)^2}{2} e^{-x}$$

En effet, résolvons l'éq (E'): $y' + y = \lambda(1+e^x)$

$$S_H = \{x \mapsto K e^{-x}, K \in \mathbb{R}\}$$

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p: x \mapsto \kappa(x) e^{-x} \text{ où } \kappa \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$y_p \text{ est sol de (E')ssi } y_p \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad y_p'(x) + y_p(x) = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad \kappa'(x) e^{-x} - \kappa(x) e^{-x} + \kappa(x) e^{-x} = \lambda(1+e^x)$$

$$\text{ssi } \forall x \in \mathbb{R} \quad \kappa'(x) = \lambda(1+e^x) e^x \text{ (forme } \lambda u u') \text{ car } y_p \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{on propose } y_p: x \mapsto \frac{\lambda(1+e^x)^2}{2} e^{-x}$$

$$S_E = \left\{ x \mapsto K e^{-x} + \frac{\lambda}{2} (1+e^x)^2 e^{-x} \right\}$$