



*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants. Barème indicatif : chaque exercice sur 20 points.*

## Exercice 1

- Résoudre l'équation différentielle  $(E) : 2y'' - 3y' + y = x + 1$ .
  - Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .
  - Résoudre l'équation différentielle  $(E') : y'' - 4y' + 4y = \sin x$ .
- On considère le système d'inconnues réelles  $x, y, z$  et de paramètre réel  $a$  :
 
$$S = \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}.$$
  - Résoudre ce système suivant la valeur du réel  $a$ .
  - Interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus à la question précédente. Réponse précise attendue.
- Résoudre l'équation  $\arcsin x = 2\arctan x$ .
  - Trouver une relation liant  $\arctan(\operatorname{th}(x))$  et  $\arctan(\operatorname{sh}(2x))$ . Pour cela, dériver les fonctions  $f : x \mapsto \arctan(\operatorname{th}(x))$  et  $g : x \mapsto \arctan(\operatorname{sh}(2x))$ . Préciser le domaine de validité de la relation obtenue.

## Exercice 2

### Étude de la fonction réciproque de la fonction th.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique.

- Montrer, en étudiant ses variations, que th est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à préciser. On note argth (argument tangente hyperbolique) sa réciproque.
- Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
- Démontrer que argth est impaire.
- Démontrer que argth est dérivable sur  $I$  et calculer sa dérivée.
- Montrer que  $\forall x \in I, \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

### Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle  $(E) : xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$ .

- Résoudre  $(E)$  sur l'intervalle  $J = ]0, 1[$ . Lors de la résolution, utiliser :  $\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x^2-1+1}{1-x^2}$ .

### Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est d'étudier le problème suivant :  
déterminer les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

- Déterminer les valeurs possibles de  $f(0)$  si  $f$  est solution.
- Montrer que, si  $f$  est solution, on a  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$ .  
(on pourra exprimer  $f(x)$  en fonction de  $f\left(\frac{x}{2}\right)$ .)
- Montrer que si  $f$  est solution,  $-f$  est aussi solution.
- Montrer que th est solution du problème posé.

**Le reste de cette partie ne doit pas être abordé. Il sera à travailler dans le DM6.**

On admet que si  $f$  est une solution du problème posé telle que  $f(0) = 1$  alors  $f$  est constante et que si  $f$  est une solution du problème posé telle que  $f(0) = -1$  alors  $f$  est constante aussi.

Dans les questions **11.** à **14.**, on suppose que  **$f$  est une solution du problème posé telle que  $f(0) = 0$ .** On admet que dans ce cas  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq -1$  et  $f(x) \neq 1$ .

On définit alors la fonction  $g$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$ .

11. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(2x) = 2g(x)$ .

12. Montrer que  $g$  est dérivable en zéro en tant que composée de fonctions dérivables à préciser.

13. Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ ; on définit la suite  $(v_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$ .

Déterminer la limite de  $(v_n)$  en utilisant la question précédente.

14. Montrer que  $(v_n)$  est constante. En déduire que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda x.$$

On explicitera  $\lambda$ .

15. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

### Exercice 3

Pour tout réel  $a$  positif ou nul, on note  $g_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $g_a(t) = t^a$ .

1. Montrer que la fonction  $g_a$  est prolongeable par continuité en 0. Dans toute la suite, on notera toujours  $g_a$  la fonction ainsi prolongée qui est donc définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Préciser la valeur de  $g_a(0)$ .

2. On suppose, dans cette question seulement, que  $a \geq 1$ .

2.a. Montrer que la fonction  $g_a$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer sa dérivée. Montrer que cette dérivée est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2.b. Montrer que la dérivée est prolongeable par continuité en 0. Dans toute la suite, on notera toujours  $g'_a$  la fonction ainsi prolongée qui est donc définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Préciser la valeur de  $g'_a(0)$ .

2.c. Que peut-on dire de  $g_a$  sur  $\mathbb{R}_+$  ?

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t) dt$$

3. Justifier l'existence de l'intégrale  $I(a, b)$ . Comparer  $I(a, b)$  et  $I(b, a)$ . On fera pour cela un changement de variables.

Dans toute la suite on s'autorisera l'écriture :

$$I(a, b) = \int_0^1 t^a (1-t)^b dt$$

4. Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs ou nuls. En intégrant par parties, montrer que

$$(b+1)I(a+1, b) = (a+1)I(a, b+1).$$

5. Calculer  $I(a, 0)$ .

6. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n+1)}$$

7. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels. Exprimer  $I(p, q)$  à l'aide des factorielles.

8. En déduire, après avoir montré son existence, la valeur de l'intégrale

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta,$$

où  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels. On posera pour cela le changement de variables  $t = \sin^2 \theta$ .