Exercice 1

Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est d'étudier le problème suivant :
déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

Les questions 7 à 10 ont été traitées dans le DS5, vous pouvez les admettre.
Il faut commencer à la question 11.

7. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
8. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1$.
   (on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
9. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
10. Montrer que th est solution du problème posé.

On admet que si f est une solution du problème posé telle que $f(0) = 1$ alors f est constante et que si f est une solution du problème posé telle que $f(0) = -1$ alors f est constante aussi.
Dans les questions **11.** à **14.**, on suppose que f **est une solution du problème posé telle que** $f(0) = 0$**.** On admet que dans ce cas $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.
On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

11. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2\,g(x)$.
12. Montrer que g est dérivable en zéro en tant que composée de fonctions dérivables à préciser.
13. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.
    Déterminer la limite de (v_n) en utilisant la question précédente.
14. Montrer que (v_n) est constante. En déduire que
    $$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda x.$$
    On explicitera λ.
15. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son premier terme $v_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout n entier naturel, par la relation $v_{n+1} = g(v_n)$.

1. Etudier les variations de la fonction g et tracer son tableau et variations.
2. Trouver un ensemble A stable par g. En déduire que la suite v est bien définie.
   Résoudre l'équation $g(x) = x$ d'inconnue x appartenant à A.
3. Etudier la monotonie de (v_n). On raisonnera par récurrence.
4. Déduire de la question précédente que (v_n) converge.
5. Déterminer sa limite.
6. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit Δ la droite d'équation $y = x$. Représenter $\mathcal{C}$,Δ et en rouge les quatre premiers termes de la suite.