TD 11 : Suites numériques

► Exercice 1 : La somme des termes d'une suite finie d'entiers impairs consécutifs est 7^3. Quels sont les termes de cette suite ?

► Exercice 2 : Si $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}$

► Exercice 3 : Convergence de la suite u définie par $u_0 = 1$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(e - u_n).$$

► Exercice 4 : Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^3+1} = 0$ en revenant à la définition d'une limite.

► Exercice 5 : Traduire pour la suite u chacun des énoncés ci-dessous, où $l \in \mathbb{R}$:

1. $\exists \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M,\ |u_n - l| \leq \epsilon.$
2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M,\ |u_n - l| \leq \epsilon.$
3. $\exists M \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0,\ \forall n \geq M,\ |u_n - l| \leq \epsilon.$
4. $\forall n \geq M,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0,\ |u_n - l| \leq \epsilon.$
5. $\forall \epsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{N},\ (n \geq M \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon).$

► Exercice 6 : Soient u et v deux suites réelles telles que $u + v$ et uv sont toutes les deux convergentes de limite 0. Montrer que u et v sont convergentes et tendent vers 0.

► Exercice 7 : Démontrer que $(\sqrt{n^2+n} - n)_{n\geq 0}$ est croissante, bornée et trouver sa limite.

► Exercice 8 : On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, de terme général
$u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.
$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes ? Convergence de u ?

► Exercice 9 : Soit z la suite définie par $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ z_n - (1+i)z_{n-1} + iz_{n-2} = 0$. Calculer z_n en fonction de n.

► Exercice 10 : On considère deux suites u et v définies par $u_0 > v_0 > 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n > 0$.
2. En déduire que u et v sont monotones.
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{u_n - v_n}{2}$ et conclure.

► Exercice 11 : Soit u une suite convergente vers l et pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+1}$. Montrer que v est convergente de limite l. Pour cela on cassera en deux la somme qui compose $|v_n - l|$ en utilisant le rang à partir duquel la quantité $|u_k - l|$ est inférieure à ϵ. Un des deux termes tend vers 0, en utilsant une majoration en valeur absolue d'une partie finie, l'autre est inférieure à un multiple constant de ϵ.

► Exercice 12 : Soit u une suite croissante. on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n$.

2. On fixe $n \in \mathbb{N}$, soit un entier p tel que $p > n$, montrer que

$$v_p \geq \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{p-n+1}{p+1} u_n.$$

3. En déduire que si v converge vers l alors u converge aussi vers l.

▶ Exercice 13 : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $(1+\frac{1}{n})^n$.
2. $\sin(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$.
3. $\sqrt[n]{n^2}$.
4. $(\frac{n-1}{n+1})^n$.
5. $\frac{3n^2+\cos n}{4(n+1)^2+\sin 3n}$

▶ Exercice 14 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$.

▶ Exercice 15 : Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$. Déterminer la limite de (u_n).
Observer que dans le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$, on ne peut rien conclure sur la limite de (u_n).
On suppose maintenant que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ avec $0 < \ell < 1$. Montrer que (u_n) converge vers 0.
On peut montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ avec $\ell > 1$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

▶ Exercice 16 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$

▶ Exercice 17 : Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

▶ Exercice 18 : Soit (u_n) une suite complexe telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

▶ Exercice 19 : Justifier que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

▶ Exercice 20 : Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in]1, +\infty[$.

1. Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.