TD 12 : Structures

► Exercice 1 : Montrer que tout groupe $(G,.)$ tel que pour tout $a \in G$, $a^2 = 1$ est commutatif.

► Exercice 2 : Montrer que tout groupe $(G,.)$ tel que pour tout $(a,b) \in G^2$, $(ab)^2 = a^2b^2$ est commutatif.

► Exercice 3 : Soit E un ensemble, $(G,.)$ un groupe et f une bijection de E sur G. pour tout $(a,b) \in E^2$, on pose $a * b = f^{-1}(f(a).f(b))$. Montrer que $(E,*)$ est un groupe.

► Exercice 4 : Les ensembles suivants sont-ils des groupes ?

1. $(1+i)\mathbb{R} = \{z = (1+i)a, a \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition dans $\mathbb{C}$.
2. $(1+i)\mathbb{R}$ muni de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathcal{R}_\Omega$ l'ensemble des rotations du plan de centre Ω, où Ω est un point donné. Montrer que $(\mathbb{U},\times)$ et $(\mathcal{R}_\Omega,\circ)$ sont des groupes isomorphes. Quelle conséquence pratique peut-on en tirer ?

► Exercice 5 : Soit $(G,*)$ un groupe et $C = \{a \in G, \forall x \in G, a * x = x * a\}$.

1. Montrer que $(C,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.
2. Si a^{-1} est le symétrique de a, montrer que
$$\forall a \in G, \forall b \in C, a * b * a^{-1} = b.$$

► Exercice 6 : Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe $(G,*)$. Montrer que

1. $A \cap B$ est un sous-groupe de $(G,*)$.
2. $A \cup B$ est un sous-groupe de $(G,*)$ ssi ($A \subset B$ ou $B \subset A$).

► Exercice 7 : Soit H une partie de $\mathbb{Z}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{Z}$, tel que H est de la forme $H = a\mathbb{Z} = \{a.k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

► Exercice 8 : On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est-il un anneau commutatif ?
2. Pour tout z de $\mathbb{Z}[i]$, on note $N(z) = a^2 + b^2 = z\bar{z}$ si $z = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
Montrer que : $\forall (z,z') \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i],\ N(zz') = N(z)N(z')$.
3. En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

► Exercice 9 : On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}],+,\times)$ est un corps commutatif.

► Exercice 10 :

1. Montrer que dans tout anneau commutatif $(A,+,\times)$ on a :
$\forall (a,b,c,d) \in A^4\ :\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.
2. En déduire que 962 est somme de deux carrés d'entiers.

3. Donner une interprétation de cette relation dans $\mathbb{C}$.

► Exercice 11 : En utilisant une formule du cours, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

► Exercice 12 : Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit qu'un élément a de A est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Si $x \in A$ est nilpotent, montrer que $1 - x$ est inversible et calculer son inverse (on utilisera $1 - x^n$).
2. Soit $(a, b) \in A^2$ tel que a soit inversible, $ab = ba$ et b soit nilpotent. Montrer que $a + b$ est inversible et donner son inverse.
3. Soit $(a, b) \in A^2$ tel que $ab = ba$. Montrer que $a + b$ et ab sont nilpotents.
4. Soit $(a, b) \in A^2$ tel que ab soit nilpotent. Montrer que ba est nilpotent.

► Exercice 9 : Soient A un anneau et $(a, b) \in A^2$. On suppose que ab est inversible et que ba n'est pas un diviseur de 0_A. Montrer que a et b sont inversibles.

► Exercice 13

1. Montrer que la composée de deux morphismes de groupes est un groupe.
2. Montrer que la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

► Exercice 14 : Soit $E =]-1, 1[$. On définit la loi $*$ par

$$\forall x, y \in E^2,\ x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
2. En utilisant $\phi\ :\ x \mapsto \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$, montrer que $(E, *)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

► Exercice 15 : Soit $(G, .)$ un groupe. On note $\mathcal{C} = \{a \in G \mid \forall x \in G,\ ax = xa\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de G.
2. Soit $a \in G$. On note $\psi_a\ :\ G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1}$. Montrer que ψ_a est un automorphisme du groupe $(G, .)$.
3. On note $(\mathcal{B}(G), \circ)$ le groupe des bijections de G. Soit $\theta\ :\ G \longrightarrow \mathcal{B}(G),\ a \mapsto \psi_a$. Monter que θ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?