

Exercice 1

- ① Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n: x \mapsto (\cos x)^n$. f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc I_n existe

↳ en fait que produit de fonctions continues

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^0 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^1 dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} + \sin 0 = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

② Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n+1} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos x)^{n+1} - (\cos x)^n \right) dx \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos x)^n}_{\geq 0} \underbrace{(\cos x - 1)}_{\leq 0} dx \end{aligned}$$

$$\text{or } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\cos x)^n (\cos x - 1) \leq 0$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n (\cos x - 1) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0$$

$$\text{Ainsi } I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

Concl: $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} \leq I_n$ donc (I_n) est décroissante.

③ Soit $n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq (\cos x)^n \leq 1^n = 1$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = I_0$$

Ainsi

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$$

⑤ Soit $n \geq 2$ - Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\sin^n(x) = (\sin x)^{n-2} \sin^2 x$

$$\begin{aligned} &= (\sin x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) \\ &= (\sin x)^{n-2} - (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \end{aligned}$$

Ainsi par linéarité de l'intégrale,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx$$

$$I_n = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx$$

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx$ en intégrant par parties

Soient $u: x \mapsto \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}$ et $v: x \mapsto \cos x$

u et v sont $\in C^1$ sur $] -1, +\infty[$

$u': x \mapsto (\sin x)^{n-2} \cos x$ et $v': x \mapsto -\sin x$.

$$\text{On a donc: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin x)^{n-2} \cos x}_{u'v} \cos x \, dx$$

$$= \left[\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \sin x \, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx = \frac{1}{n-1} I_n$$

Ainsi $I_n = \frac{1}{n-1} I_{n-2}$ d'où $I_{n-2} = I_n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$

d'où $I_{n-2} = I_n \times \frac{n}{n-1}$

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

⑥ Soit $P(n): "I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}"$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

est vraie en raisonnant par récurrence.

• Si $n=1$ alors $I_2 = 1$ et

$$\frac{(2 \times 1)!}{2^{2 \times 1} (1!)^2} = \frac{1}{2}$$

d'après la relation ①: $I_2 = \frac{1}{2} I_0$ donc $I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$ et $P(1)$ est vérifiée.

• supposons que $P(n)$ est vraie pour $n \geq 1$ et montrons que alors $P(n+1)$ est vraie.

$$I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = \frac{2n+2-1}{2n+2} I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)^2 2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

donc $P(n+1)$ vraie

• Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie

⑦ Soit $Q(n): "I_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! (2n+1)}"$. Montrons que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, Q(n)$ est vraie en raisonnant par récurrence:

• Si $n=1$, $I_{2n+1} = I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$ et $\frac{2^{2 \times 1} (1!)^2}{(2 \times 1)! (3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

donc $Q(1)$ est vraie.

• hérédité: supposons que $Q(n)$ est vraie pour $n \geq 1$ et montrons que alors $Q(n+1)$ est vraie.

$$I_{2(n+1)+1} = I_{2n+3} = \frac{2n+3-1}{2n+3} I_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! (2n+1)} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n+2)^2 2^{2n} (n!)^2}{(2n)! (2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$

donc $I_{n+3} = \frac{2^{n+2} ((n+1)!)^2}{(2n+2)! (2n+3)}$ donc $Q(n+1)$ vraie 3/4

• Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie

⑧ D'après ② (I_n) est décroissante donc $\forall n \geq 1, I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

⑨ Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $I_n = 0$.

Alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = 0$ or $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin^n(x) \geq 0$

et $x \mapsto \sin^n(x)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin^n(x) = 0$ donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) = 0$
ce qui est absurde!

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$
et d'après ⑦:

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_n}{I_n}$$

donc d'après ④ $I_{n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$

on obtient: $\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ - Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$

on obtient par le théorème des gérondos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

⑩ Soit $n \geq 1$, $I_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)! (2n+1)} \times \frac{2 \times 2^n (n!)^2}{(2n)! \times \pi}$

$$= \frac{(2^n)^2 (n!)^4 \times 2}{((2n)!)^2 (2n+1) \times \pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ d'après 9.8.}$$

Donc par composée des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{I_{n+1}}{I_n}}$ existe et vaut 1

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n (n!)^2 \times \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{2n+1} \sqrt{\pi}} = 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

④ Soit $n \geq 1$ On fait le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - x$

$x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$du = -dx$

lorsque x vaut 0, u vaut $\frac{\pi}{2}$

lorsque x vaut $\frac{\pi}{2}$, u vaut 0

Donc $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n(x)) (\frac{\pi}{2} - x) dx$

$I_n = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\frac{\pi}{2} - u) du$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u) du$ échange des bornes

Ainsi $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n du$

- ① Soit $x > 0$
 $f: t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $[x, x^2]$ si $x \geq 1$
 sur $[x^2, x]$ si $x < 1$

donc $H(x)$ existe pour tout $x > 0$
 Ainsi H est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

- ② Soit $F: x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

Comme $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est définie et continue sur $[1, x]$ si $x \geq 1$
 sur $[x, 1]$ si $x < 1$
 alors F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $F'(x) = \frac{e^x}{x}$

Ainsi pour tout $x > 0$, $H(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = F(x^2) - F(x)$

Donc H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de fonctions dérivables

et $\forall x > 0$ $H'(x) = F'(x^2) \times 2x - F'(x) = f(x^2) \times 2x - f(x)$
 $= \frac{e^{x^2}}{x^2} \times 2x - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2}}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x} = H'(x)$

- ③ Soit $x > 1$ Soit $t \in [x, x^2]$, on a l'encadrement: $e^x < e^t < e^{x^2}$
 ainsi $\forall t \in [x, x^2]$, $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{x^2}}{t}$

et donc: $\int_x^{x^2} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{e^{x^2}}{t} dt$

donc $e^x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \leq H(x) \leq e^{x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$

donc $e^x [\ln x^2 - \ln x] \leq H(x) \leq e^{x^2} [\ln x^2 - \ln x]$

Soit $x > 1$ $e^x [2\ln x - \ln x] \leq H(x) \leq e^{x^2} [2\ln x - \ln x]$

Donc $e^x \ln x \leq H(x) \leq e^{x^2} \ln x$

- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln x = +\infty$ par produit donc par le th de minoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{H(x)}{x} = +\infty$
 par le th de minoration donc H admet une tangente asymptotique de direction asymptotique (0,1)
 $\forall x > 0$ $\frac{e^x \ln x}{x} \leq \frac{H(x)}{x} \leq \frac{e^{x^2} \ln x}{x}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} e^x = +\infty$ par produit et par