Exercice 1 :

① ⓐ • on résout l'équation différentielle sans second membre

(E_0) : $2y''-3y'+y=0$, 0,5 Pour cela on écrit l'équation caractéristique

(E_c) : $2r^2-3r+1=0$, 0,5

$\Delta = 9-4\times2\times1=1$

(E_c) a 2 solutions : 1 et $\frac{1}{2}$.

D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_0) est donc :

$S_0=\{x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{\frac{x}{2}}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$ / 0,5

• on cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$\varphi_0 : x\mapsto e^{\alpha x}Q(x)$, où $\alpha=0$ et $\deg Q=\deg P$ car le second membre

3,5 de (E) est de la forme $e^{\alpha x}P(x)$ avec $\alpha=0$ et $P(x)=1+x$.

($\alpha=0$ n'est pas une racine de (E_c)) - φ_0 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$\varphi_0 : x\longmapsto ax+b$ / 0,5

$\varphi'_0 : x\longmapsto a$

$\varphi''_0 : x\longmapsto 0$

φ_0 est solution de (E) ssi $2\times\varphi''_0(x)-3\varphi'_0(x)+\varphi_0(x)=1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ssi $2\times0-3a+ax+b=1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$, 0,5

ssi $\begin{cases}a=1\\-3a+b=1\end{cases}$ ssi $\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$

$\varphi_0 : x\longmapsto x+4$ est 1 solution particulière de (E), 0,5

• L'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{S=\{x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{\frac{x}{2}}+x+4, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}}$ 0,5

ⓑ Soit $f : x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{\frac{x}{2}}+x+4$. On cherche à déterminer λ et μ tels que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

$f' : x\mapsto \lambda e^{x}+\frac{\mu}{2}e^{\frac{x}{2}}+1$, 0,5

$f'(0)=\lambda+\frac{\mu}{2}+1$

$f(0)=\lambda+\mu+4$

1,5 $\begin{cases}f(0)=0\\f'(0)=1\end{cases}$ ssi $\begin{cases}\lambda+\mu+4=0\\\lambda+\frac{\mu}{2}+1=1\end{cases}$ / 0,5 ssi $\begin{cases}\lambda=-\mu-4\\-\mu-4+\frac{\mu}{2}+1=1\end{cases}$ ssi $\begin{cases}\lambda=-\mu-4\\-\frac{\mu}{2}=4\end{cases}$

ssi $\begin{cases}\lambda=4\\\mu=-8\end{cases}$

Concl : $\boxed{f : x\longmapsto 4e^{x}-8e^{\frac{x}{2}}+x+4}$ est la solution du problème de Cauchy posé ici. / 0,5

ⓒ • on résout l'équation différentielle sans second membre

(E_0) : $y''-4y'+4y=0$, 0,5 Pour cela on écrit l'équation caractéristique (E_c) : $r^2-4r+4=0$, 0,5

$\Delta=16-4\times4=0$

(E_c) a une seule solution : 2.

D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_0) est donc :
$S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu x e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$, 0,5

- On cherche une solution particulière de (E') sous la forme :
  $y_p : x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$, 0,5 car i n'est pas solution de (Ec)
  y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
  $y_p' : x \mapsto -\alpha \sin x + \beta \cos x$
  $y_p'' : x \mapsto -\alpha \cos x - \beta \sin x$

4 y_p est solution de (E') ssi $y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\alpha\cos x - \beta \sin x - 4(-\alpha \sin x + \beta \cos x) + 4(\alpha \cos x + \beta \sin x) = \sin x$ 0,5
ssi $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x(-\alpha - 4\beta + 4\alpha) + \sin(x)(-\beta + 4\alpha + 4\beta) = \sin x$
ssi $\begin{cases} -\alpha - 4\beta + 4\alpha = 0 \\ -\beta + 4\alpha + 4\beta = 1 \end{cases}$, 0,5 ssi $\begin{cases} \alpha = \frac{4}{3}\beta \\ \frac{16}{3}\beta + 3\beta = 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \alpha = \frac{4}{3}\beta \\ \frac{25}{3}\beta = 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \alpha = \frac{4}{25} \\ \beta = \frac{3}{25} \end{cases}$
$y_p : x \mapsto \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x$ est donc une solution particulière de (E'), 0,5

- L'ensemble des solutions de (E') est $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu x e^{2x} + \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}$ 0,5

② a) et b) Soit $a \in \mathbb{R}$. La matrice augmentée associée au système S est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a-2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

5 $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(a-2)(a+1) & 3-a \end{array}\right), 0,5$$

Développons $4 - (a-2)(a+1) = 4 - (a^2 + a - 2a - 2) = 4 - a^2 + a + 2 = -a^2 + a + 6$
Le polynôme du second degré a pour racines : $\frac{-1+5}{-2} = -2$ et $\frac{-1-5}{-2} = 3$
Disjonction de cas : 0,5 On a donc $-a^2 + a + 6 = -(a+2)(a-3)$.

- si $a = -2$ alors S est équivalent à $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 5 \end{cases}$ qui est impossible $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$ 0,5
- si $a = 3$ alors S est équivalent à $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 1 - y + z = 1 - 1 + 4z + z = 5z \\ y = 1 - 4z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\mathcal{S} = \{(5z, 1-4z, z), z \in \mathbb{R}\}$ 0,5 $= \boxed{\{(0,1,0) + z(5,-4,1), z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}}$ 0,5
$\mathcal{S}$ est la droite de l'espace passant par $A(0,1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5,-4,1)$

- si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, $\boxed{\mathcal{S} = \{(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})\}}$ 0,5. $\mathcal{S}$ est un point : le point $B(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+\dots}$
car S est équivalent à $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ \dots \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 1 - y + z = 1 \quad 0,5 \\ y = 1 - (a+1)z = 1 - \frac{a+1}{a+2} = \frac{a+2-a-1}{a+2} = \dots \end{cases}$

3 (a) Cette équation est définie pour x appartenant à $[-1,1]$ car $\mathcal{D}_{\arcsin} \subset \mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$. 3/8

Soit $x \in [-1,1]$, $\arcsin x = 2 \arctan x$

ssi $\begin{cases} \sin(\arcsin x) = \sin(2\arctan x) \\ \underbrace{\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ et } 2\arctan x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}_{} \end{cases}$

vrai puisque $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et $x \in [-1,1]$

ssi $\begin{cases} x = 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) \\ \underbrace{\arctan x \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]}_{} \end{cases}$

vrai : si $x \in [-1,1]$, alors $\arctan x \in [\arctan(-1), \arctan(1)] = [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ car arctan est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

4

ssi $x = 2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ssi $x = \dfrac{2x}{1+x^2}$

ssi $x(1+x^2) = 2x$ car $1+x^2 \neq 0$

ssi $x(1+x^2-2) = 0$

ssi $x\,(x^2-1) = 0$

ssi $x = 0$ ou $x^2 = 1$

ssi $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

D'où $\boxed{S = \{-1, 0, 1\}}$ où S est l'ensemble des solutions de l'équation $\arcsin x = 2 \arctan x$

(b)
- f est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de th : dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et arctan, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{th}^2 x} \times \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2x}$.

on utilise $(\arctan(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

- g est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de $x \mapsto 2x$, dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de sh, dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de arctan, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{sh}^2 2x} \times 2 \times \mathrm{ch}\, 2x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 2x} \times 2 \times \mathrm{ch}\, 2x = \dfrac{2}{\mathrm{ch}\, 2x}$
car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

3

- Ainsi, $g' = 2f'$. On en déduit que $g = 2f + K$, $K \in \mathbb{R}$.
Or $g(0) = \arctan(0) = 0$ et $f(0) = \arctan(0) = 0$ donc $K = g(0) - 2f(0) = 0$

$\boxed{\text{Concl : } g = 2f \text{ ie } \forall x \in \mathbb{R}\ \arctan(\mathrm{ch}\, 2x) = 2\arctan(\mathrm{th}(x))}$

Exercice 2

① th est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} \neq 0$.
th est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto e^x - e^{-x}$ (dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables) et $x \mapsto e^x + e^{-x}$ (dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{ch^2(x)} > 0$$

th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4

De plus th est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle de $\mathbb{R}$).
On en déduit que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $th(\mathbb{R})$ avec $th(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} th(x), \lim\limits_{x\to+\infty} th(x)\right[$ par le th de la bijection

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$

]-1,1[par ① 0,5
]-1,1[avec ① 0,5

Donc $\boxed{th(\mathbb{R}) =]-1,1[= I}$

② $\forall x \in \mathbb{R}$, $th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} = \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \boxed{1 - th^2(x) = th'(x)}$

ou (autre méthode) :

0,5

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = 1 - th^2(x).$$

③ $]-1,1[= I$ est symétrique par rapport à 0
Soit $x \in I$, $th(argth(-x)) = -x$
et $-x = -th(argth(x)) = th(-argth(x))$ car th est impaire sur $\mathbb{R}$
donc $th(argth(-x)) = th(-argth(x))$

2

Comme th est injective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, on en déduit que $\forall x \in I$, $argth(-x) = -argth(x)$.
Conclusion : argth est impaire sur $]-1,1[$

④ th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $th' = 1 - th^2 = \frac{1}{ch^2(x)}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc argth est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

2

$$\boxed{\forall x \in I,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}} \qquad \left((f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \right)$$

(5) On cherche à résoudre, pour $y \in]-1,1[$, l'équation $y = \operatorname{th} x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y = \operatorname{th} x \\ y \in]-1,1[\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ y \in]-1,1[\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} y = \dfrac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \\ X = e^x > 0 \\ y \in]-1,1[\end{cases} \quad X + \frac{1}{X} > 0$$

$$\text{ssi } \begin{cases} \left(X + \frac{1}{X}\right) y = X - \frac{1}{X} \\ X = e^x > 0 \\ y \in]-1,1[\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} (X^2+1)\, y = X^2 - 1 \\ X = e^x > 0 \\ y \in]-1,1[\end{cases}$$

1,5

$$\text{ssi } \begin{cases} X^2(y-1) + y + 1 = 0 \\ X = e^x > 0 \\ y \in]-1,1[\end{cases} \quad 1-y \neq 0 \quad \text{ssi } \begin{cases} X^2 = \dfrac{y+1}{1-y} \\ X = e^x > 0 \\ y \in]-1,1[\end{cases} \quad \begin{array}{l} y+1>0 \\ 1-y>0 \\ \text{car } y \in]-1,1[\end{array}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} X = \sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}} \text{ ou } -\sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}} \\ X = e^x > 0 \\ y \in]-1,1[\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} X = \sqrt{\dfrac{y+1}{1+y}} \\ X = e^x \\ y \in]-1,1[\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}} \\ y \in]-1,1[\end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \\ y \in]-1,1[\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

Calculs non demandés pour (7-10) utile (2)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b + \operatorname{ch}a\operatorname{sh}b}{\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b} = \frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}b}{1 + \operatorname{th}a\operatorname{th}b}$$

on divise par $\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b$

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}(-b)}{1 + \operatorname{th}a\operatorname{th}(-b)} = \frac{\operatorname{th}a - \operatorname{th}b}{1 - \operatorname{th}a\operatorname{th}b}$$ car th est impaire sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{\operatorname{th}x + \operatorname{th}x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$ ($a = b = x$ dans la 1ère formule).

$$\boxed{\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x}}$$

(6) • on résout (E_0) : $xy' + 3y = 0$.

$ay' + by = 0$

$a : x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $]0,1[$

$\frac{b}{a} : x \longmapsto \frac{3}{x}$ est continue sur $]0,1[$, donc admet une primitive $A : x \longmapsto 3\ln x$, 0,5 si si rien avant après rien après 6/8

2 D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$ est
$S_0 = \{x \longmapsto \lambda e^{-3\ln x}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{x \longmapsto \frac{\lambda}{x^3}, \lambda \in \mathbb{R}\} = S_0}$

- On cherche une solution particulière φ_0 de (E) par la méthode de variation de la constante. On cherche φ_0 sous la forme $\forall x \in]0,1[, \varphi_0(x) = \frac{\lambda(x)}{x^3}$, où λ est une fonction dérivable sur $]0,1[$.

5

$\forall x \in]0,1[, \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)e^{-A(x)}} = \frac{\frac{1}{1-x^2}}{x \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x^2-1+1}{1-x^2}$

2,5 $= \frac{x^2-1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2} = -1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$

On choisit $\forall x \in]0,1[, \lambda(x) = -x + \operatorname{argth}(x)$ bonus 1

Ainsi $\varphi_0 : x \longmapsto \frac{-x}{x^3} + \frac{\operatorname{argth}(x)}{x^3}$

$\varphi_0 : x \longmapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{\operatorname{argth}(x)}{x^3}$ $-\frac{1}{2}\ln\frac{2+2x}{2-2x}$

- L'ensemble des solutions de (E) est donc :

0,5 $\boxed{S = \{x \longmapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{\operatorname{argth}(x)}{x^3} + \frac{\lambda}{x^3}, \lambda \in \mathbb{R}\}}$

7 Si f est solution alors $f(2\times 0) = f(0) = \frac{2f(0)}{1+(f(0))^2}$

ssi $f(0)(1+(f(0))^2) = 2f(0)$ ssi $f(0)(1+(f(0))^2-2) = 0$
ssi $f(0)((f(0))^2-1) = 0$,

1,5 ssi $f(0) = 0$ ou $(f(0))^2 = 1$, càd
ssi $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.

Les valeurs possibles de $f(0)$ sont : -1, 0 et 1.

8 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2f(\frac{x}{2})}{1+(f(\frac{x}{2}))^2}$. Pour alléger les calculs, on pose $a = f(\frac{x}{2})$. Montrons que : $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{2a}{1+a^2} \leq 1.}$

On sait que $(1-a)^2 \geq 0$. Or $(1-a)^2 = 1+a^2-2a$

1,5 donc $1+a^2 \geq 2a$ or $1+a^2 > 0$
donc $1 \geq \frac{2a}{1+a^2}$.

D'autre part $(1+a)^2 \geq 0$, or $(1+a)^2 = 1+a^2+2a$
donc $1+a^2 \geq -2a$ or $1+a^2 > 0$ donc $1 \geq \frac{-2a}{1+a^2}$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1.}$

(9) Si f est solution alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$ f dér en o

$-f$ dér en 0

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-f)(2x) = -f(2x) = -\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$

D'autre part, $\dfrac{2(-f)(x)}{1+((-f)(x))^2} = -\dfrac{2f(x)}{1+(-f(x))^2} = -\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$

Donc $(-f)(2x) = \dfrac{2(-f)(x)}{1+((-f)(x))^2}$ et $\underline{-f \text{ est solution}}$

(10) 2 d'après (A)9, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}\, 2x = \dfrac{2\,\text{th}\, x}{1+(\text{th}\, x)^2}$ donc et th dér en 0 th est solution du problème

EXERCICE 3 (1) Si $a=0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $g_a(t) = t^0 = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} g_a(t) = 1$ g_a est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{g_0(0)=1}$

Soit $a>0$. $\lim\limits_{t\to 0} g_a(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^a = \lim\limits_{t\to 0} e^{a\ln t} = 0$ car $a>0$ et $\lim\limits_{t\to 0} \ln t = -\infty$

3 et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$.)

g_a est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{g_a(0)=0}$

(2)(a) Soit $a \geq 1$. $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_a(t) = e^{a\ln t}$

$t \mapsto a\ln t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $t \mapsto e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $g_a(t)$, en tant que composée de fonctions

2 dérivables, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_a'(t) = \dfrac{a}{t} e^{a\ln t} = \dfrac{a}{t}\cdot t^a = a t^{a-1} = a g_{a-1}(t)$

(b) Comme g_{a-1} est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\underline{g_a' = a g_{a-1} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$

1,5 $\lim\limits_{t\to 0} g_a'(t) = a \lim\limits_{t\to 0} g_{a-1}(t) = 0$ si $a>1$, $= a$ si $a=1$, donc g_a' est prolongeable par continuité en 0 et $\underline{g_a'(0) = 0 \text{ si } a>1 \text{ et } a \text{ si } a=1}$

0,5 (c) $\underline{g_a \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$

(3) Comme $a \geq 0$, g_a est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après ce qui précède donc sur $[0,1]$

Comme $b \geq 0$, g_b est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après ce qui précède donc sur $[0,1]$

$t \mapsto 1-t$ est continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$

En tant que produit et composée de fonctions continues, $t \mapsto g_a(t) g_b(1-t)$ est continue sur $[0,1]$ donc $I(a,b)$ existe.

3,5 $I(b,a) = \int_0^1 g_b(t) g_a(1-t)\,dt = \int_0^1 t^b (1-t)^a\,dt$ $t \mapsto 1-t$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

On fait le changement de variables $u = 1-t$, $du = -dt$

$I(b,a) = \int_1^0 (1-u)^b u^a (-du) = \int_0^1 (1-u)^b u^a\,du = I(a,b)$ $\boxed{I(a,b) = I(b,a)}$

(4) Soit $u : t \mapsto t^{a+1}$ et $v : t \longmapsto -(1-t)^{b+1}$. Comme $a+1 \geq 1$ et $b+1 \geq 1$, d'après (2) u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[0,1]$ et on peut

2,5 procéder à une $\underline{\text{intégration par parties}}$: $u' : t \mapsto (a+1)t^a$ et $v' : t \longmapsto (1-t)^b \times (b+1)$

$(b+1)\, I(a+1,b) = (b+1)\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^b\,dt = \left[t^{a+1} \times (-(1-t)^{b+1})\right]_0^1 + \int_0^1 (a+1) t^a (1-t)^{b+1}\,dt$

$= (a+1) \int_0^1 t^a (1-t)^{b+1}\,dt$

Ainsi $\boxed{(b+1)\, I(a+1,b) = (a+1)\, I(a,b+1)}$

1 ⑤ $I(a,0) = \int_0^1 t^a (1-t)^0 dt = \int_0^1 t^a dt = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$ 8/8

⑥

Montrons par récurrence, que $\mathcal{P}(n)$: " Soit $a \geq 0$ $I(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}$ "

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : si $n=0$ alors si $a \geq 0$ $I(a,0) = \frac{1}{a+1}$ d'après ⑤

or $\frac{0!}{a+1} = \frac{1}{a+1}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie,

• hérédité : supposons que la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'alors elle est vraie pour $n+1$. Soit $a \geq 0$

On a $I(a+1,n) = \frac{n!}{(a+2)(a+3)\cdots(a+1+n+1)}$

3,5 et d'après ④ : $I(a,n+1) = \frac{n+1}{a+1} I(a+1,n)$

$= \frac{n+1}{a+1} \times \frac{n!}{(a+2)(a+3)\cdots((a+1)+(n+1))}$

$= \frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+(n+2))}$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

⑦ Soient p et q deux entiers naturels. D'après la question 6 :

$I(p,q) = \frac{q!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q+1)} = \frac{q!}{\frac{(p+q+1)!}{p!}} = q! \times \frac{p!}{(p+q+1)!}$

1 $\boxed{I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}$

⑧ Soient p et q deux entiers naturels.

$\theta \longmapsto \sin^2\theta$ est une fonction de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc on peut procéder au changement de variables $t = \sin^2\theta$.

bonus 0,5 L'intégrale $J(p,q)$ existe car $\theta \mapsto (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1}$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

On a $dt = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$, donc $\frac{dt}{2} = \sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p}(\cos\theta)^{2q}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^p (1-\sin^2\theta)^q \cos\theta\sin\theta\, d\theta$

2,5 $J(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} I(p,q) = \boxed{\frac{p!\,q!}{2(p+q+1)!} = J(p,q)}$

Pour les bornes :

lorsque $\theta = 0$, que vaut t ? $t = \sin^2 0 = 0$

lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, que vaut t ? $t = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$