DM6 cor MPSI le 22/12/23

Exercice 1 : suite de l'exo2 du DS5

(11) $\forall x \in \mathbb{R},\ th(g(2x)) = th(argth(f(2x))) = f(2x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ th(2g(x)) = \dfrac{2\,th(g(x))}{1+th^2(g(x))} = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$ car $g(x) = argth(f(x))$

or $f$ est solution du problème posé donc $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$

et $th(g(2x)) = th(2g(x))$.

Or $th$ est injective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)$.

(12) g est dérivable en 0 en tant que composée de fonctions dérivables : $x \mapsto f(x)$ est dérivable en 0 puisque solution du problème posé

$x \mapsto argth\,x$ est dérivable sur $]-1,1[$ donc en particulier en $f(0) = 0 \in ]-1,1[$.

(13) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}$ car $g(0) = argth(f(0)) = argth(0) = 0$.

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ et $g$ est dérivable en 0

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{g(y) - g(0)}{y - 0}$

$= g'(0)$. Concl : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g'(0)}$

(14) $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$v_0 = \dfrac{g(x)}{x}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n$

$v_{n+1} = \dfrac{g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = \dfrac{\frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}\frac{x}{2^n}} = v_n$. Donc $(v_n)$ est constante

d'après (11) $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2 \times g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2^n}\right)$

Comme $(v_n)$ est constante, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0 = \dfrac{g(x)}{x}$

Or d'après (15), $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g'(0)$.

Par unicité de la limite on a donc : $\dfrac{g(x)}{x} = g'(0)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a donc $g(x) = g'(0)x$.

De plus $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g'(0)x$. On a donc $\boxed{\lambda = g'(0)}$

(15) D'après ce qui précède, si $f$ est solution du problème posé, soit $f$ est constante égale à $1$, soit $f$ est constante égale à $-1$, soit $f : x \mapsto th(\lambda x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, les fonctions constantes égales à $1$ ou à $-1$ sont bien solutions du problème posé. Vérifions que $\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R}}$, $f : x \mapsto th(\lambda x)$ est bien solution.

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et est dérivable en $0$ car $th$ est dérivable en $0$ et $x \mapsto \lambda x$ aussi. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(2\lambda x) = \dfrac{2\,th(\lambda x)}{1 + (th(\lambda x))^2}$ d'après (7) donc $f$ est bien solution du problème posé.

Les fonctions solutions sont donc les fonctions constantes égales à $-1$ ou $1$ et les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = th(\lambda x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

exercice 2



① $g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \geq 0$ ssi $1 - \frac{2}{x^2} \geq 0$ ssi $1 \geq \frac{2}{x^2}$ ssi $x^2 \geq 2$

ssi $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{2}$ ssi $|x| \geq \sqrt{2}$ ssi $\left(x \geq \sqrt{2} \text{ ou } x \leq -\sqrt{2}\right)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

② Montrons que <u>$A = [\sqrt{2}, +\infty[$ est stable par $g$</u>

On a d'après le tableau de variations de $g$ : $g([\sqrt{2}, +\infty[) = [\sqrt{2}, +\infty[$.

De plus $v_0 = \frac{3}{2} \in [\sqrt{2}, +\infty[$ donc on peut montrer par récurrence que "$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n$ existe et $v_n \in A$". Ainsi <u>$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.</u>

Résolvons l'équation $g(x) = x$ d'inconnue $x \in A$.

Soit $x \in A$. $g(x) = x$ ssi $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x$ ssi $\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$ ssi $x^2 = 2$ ssi $x = \pm\sqrt{2}$

<u>L'équation a une unique solution dans $A$ : $\sqrt{2}$</u>. (un seul point fixe pour $g$ dans $A$).

③ Soit $\mathcal{P}_n$ : " $\ _{n+1} \leq \ _n$ ". Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}_n$ vraie par récurrence

- initialisation : $v_1 \leq v_0$ En effet, $v_1 = \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{2}{v_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right)$

  càd $v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6} + \frac{8}{6}\right) = \frac{17}{12} \leq \frac{3}{2} = \frac{18}{12} = v_0$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie
- hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}_n$ vraie. Mq $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

  $v_{n+1} = g(v_n)$ et on a d'après HR : $v_{n+1} \leq v_n$

  Comme $g$ est croissante sur $A$ et comme $v_n \in A$ et $v_{n+1} \in A$,

  on a : $g(v_{n+1}) \leq g(v_n)$ càd $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

  donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie
- concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}_n$ vraie

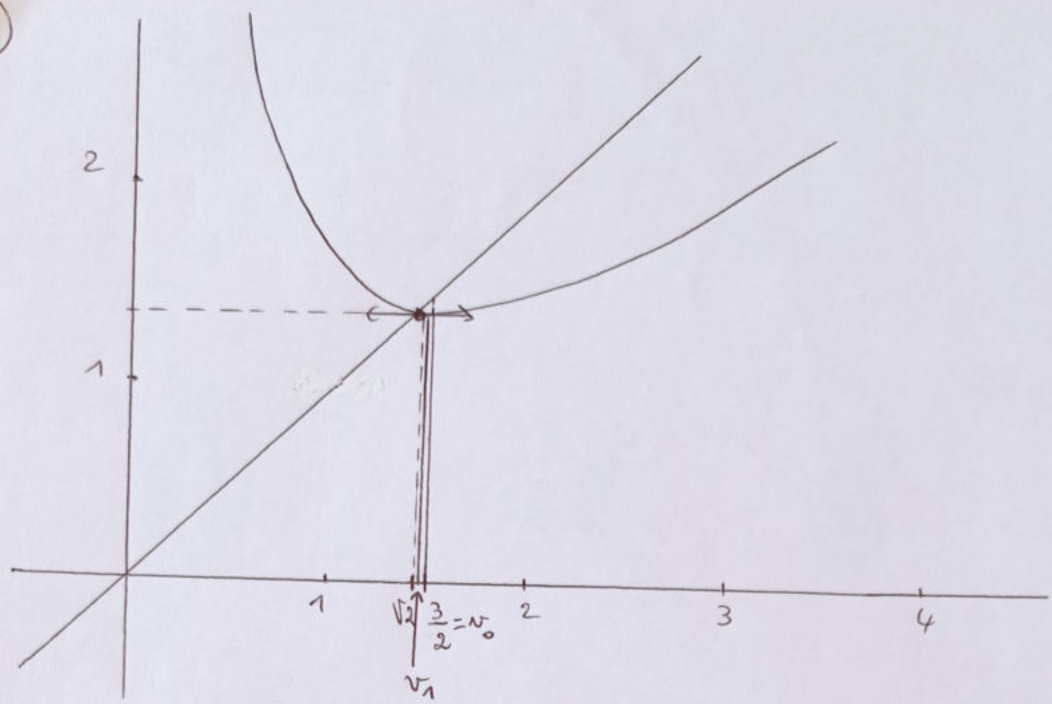
<u>Concl : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante</u>

④ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \in A$ d'après q②. Donc par le théorème de la limite monotone, <u>$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente</u>. Soit $\ell$ sa limite $\Rightarrow \ell \in A$

⑤ $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = g(v_n)$ donc par passage à la limite, comme la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et comme $g$ est continue sur $A$, on a : $\ell = g(\ell)$. Or le seul point fixe de $g$ sur $A$ est $\sqrt{2}$.

Concl : <u>$\ell = \sqrt{2}$.</u>

(6)




on a : $v_2$ très proche de $v_1$, $\sqrt{2} \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$.