Ex 11 TD 11 Ce résultat porte le nom de théorème de Cesàro

Sa réciproque est fausse :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2(n+1)}$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ mais (u_n) n'a pas de limite

donc elle ne converge pas.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $n \geq n_0$,

$$
\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_k}{n+1} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{u_k}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\ell \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_k - \ell}{n+1} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{u_k - \ell}{n+1} \right| \\
\text{IT} \quad &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_k - \ell}{n+1} \right| + \left| \sum_{k=n_0}^{n} \frac{u_k - \ell}{n+1} \right| \\
\text{IT} \quad &\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{|u_k - \ell|}{n+1} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{|u_k - \ell|}{n+1} \\
&\leq \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| \right)}_{\text{indépdt de } n} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\varepsilon/2}{n+1} \\
&\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| \right) + \frac{\varepsilon(n - n_0 + 1)}{2(n+1)} \\
\frac{n - n_0 + 1}{n+1} \leq 1 \quad &\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| \right) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| \right) = 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq n_1,\quad \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi si on pose $n_2 = \max(n_0, n_1)$, alors

$\forall n \geq n_2,\quad |v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

<u>Concl</u> v CV vers ℓ

Exercice 15 TD11 0) voir : 2) avec $l=0$.

1) si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on ne peut rien conclure sur la limite de u.

En effet, u peut DV vers $+\infty$ (prendre $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = n$)

u peut CV vers 0 (prendre $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \frac{1}{n}$)

u peut CV par ex vers 2 (prendre $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$)

2) supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ avec $0 \leq l < 1$ - Mq (u_n) CV vers 0

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \frac{1-l}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \frac{l-1}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \leq \frac{1-l}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \frac{3l-1}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}$

$u_n > 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \leq \left(\frac{l+1}{2}\right) u_n$

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.

or $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow 0 < u_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.

Par le th des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = 0$,

puisque $\frac{1}{2} \leq \frac{l+1}{2} < 1$, on peut dire que

(u_n) CV vers 0.

3) supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ avec $l > 1$. Mq (u_n) DV vers $+\infty$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \frac{l-1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1-l}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} + l \leq \frac{l-1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1+l}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$ $u_n > 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{1+l}{2} u_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-n_0} \times u_{n_0}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-n_0} \times u_{n_0} = +\infty$

car $u_{n_0} > 0$ et $\frac{1+l}{2} > 1$ donc par th de minoration, u DV vers $+\infty$