CORRIGE DU DM4 FAIT LE 17/11/23

EXERCICE 1 :

① Le réel -1 étant racine évidente, on peut mettre $z+1$ en facteur et l'équation s'écrit :
$$(z+1)(z^2-3z+3-i)=0$$
Le discriminant de l'équation du second degré $z^2-3z+3-i=0$ est :
$$\Delta = 9-4(3-i) = 4i-3 = (2i+1)^2$$
et les racines sont $\alpha = \dfrac{3-(2i+1)}{2} = 1-i$ et $\beta = \dfrac{3+(2i+1)}{2} = 2+i$.

$S = \{-1, 1-i, 2+i\}$

② Soient A, B, C les points d'affixes respectives $\alpha, \beta, -1$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour affixes respectives $1+2i$ et $-2+i$.
Comme :
$$-2+i = i(1+2i),$$
on passe de B à C par la rotation de centre A et dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ et le triangle (ABC) est rectangle isocèle en A.

③ L'affixe de l'isobarycentre G du triangle ABC est $\frac{1}{3}(\alpha+\beta-1) = \frac{2}{3}$.
Les coordonnées de G sont donc $(\frac{2}{3}, 0)$.

Exercice 2 :

① $a = 16(1-i)$.
$|a| = |16|\,|1-i| = 16\sqrt{1^2+1^2} = 16\sqrt{2}$
$a = 16\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 16\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$

D'après la propriété 25 du chapitre 3, a admet 3 racines cubiques qui sont : $\sqrt[3]{16\sqrt{2}}\, e^{-\frac{i\pi}{12}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ avec $k = 0, 1, 2$

c'est-à-dire $2\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{12}}$, $2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et $2\sqrt{2}\, e^{i\frac{15\pi}{12}}$

②ⓐ

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $z_\lambda = 1+i+2\sqrt{2}(\cos\lambda + i\sin\lambda)$
$$= \underbrace{1+2\sqrt{2}\cos\lambda}_{x_\lambda} + i\,(\underbrace{1+2\sqrt{2}\sin\lambda}_{y_\lambda})$$

$$\boxed{x_\lambda = 1+2\sqrt{2}\cos\lambda \quad \text{et} \quad y_\lambda = 1+2\sqrt{2}\sin\lambda}$$

2b $(x_\lambda-1)^2+(y_\lambda-1)^2 = (2\sqrt{2}\cos\lambda)^2+(2\sqrt{2}\sin\lambda)^2$
$= 8\cos^2\lambda + 8\sin^2\lambda = 8(\cos^2\lambda+\sin^2\lambda)$

$(x_\lambda-1)^2+(y_\lambda-1)^2 = 8$

Donc M_λ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(1,1)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

3 $(z-(1+i))^3 = a$ ssi $z-(1+i)$ est racine cubique de a

ssi $z-(1+i) = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{-i\pi}{12}}$
ou $z-(1+i) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$
ou $z-(1+i) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{15\pi}{12}}$

ssi $z = 1+i+2\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{12}}$
ou $z = 1+i+2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$
ou $z = 1+i+2\sqrt{2}\, e^{i\frac{15\pi}{12}}$

ssi $z = 1+i+2\sqrt{2}\quad e^{i\lambda}$ avec $\lambda \in \left\{-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right\}$

Concl. Les solutions de l'équation $(z-(1+i))^3 = a$ sont de la forme z_λ avec $\lambda \in \left\{\frac{-\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right\}$ donc ce sont les affixes de points de $\mathscr{C}$.

4 $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$ ssi $\begin{cases} Z = z^3 \\ Z^2+(2i-1)Z-1-i=0. \end{cases}$

Résolvons l'équation $Z^2+(2i-1)Z-1-i=0$.

$\Delta = (2i-1)^2 - 4\times1\times(-1-i) = \cancel{-4}+1\cancel{-4i}+\cancel{4}+\cancel{4i} = 1.$

donc $Z = \frac{-2i+1+1}{2} = -i+1$ ou $Z = \frac{-2i+1-1}{2} = -i$

On cherche maintenant à résoudre $z^3 = 1-i$ et $z^3=-i$, càd que l'on cherche les racines cubiques de $1-i$ et $-i$.

- racines cubiques de $1-i$: $|1-i| = \sqrt{2}$ donc $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
$= \sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

Les 3 racines cubiques de $1-i$ sont donc :

$\sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{-i\pi}{12}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{7i\pi}{12}}$ et $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{15i\pi}{12}}$ avec $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$.

- racines cubiques de $-i$: $-i = e^{\frac{3i\pi}{2}}$

Les 3 racines cubiques de $-i$ sont donc

$e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ avec $k=0,1,2$, càd

$e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{\frac{i7\pi}{6}}$ et $e^{\frac{i11\pi}{6}}$

Finalement $\boxed{S = \left\{2^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{7i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{15i\pi}{12}}, e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{\frac{i7\pi}{6}}, e^{\frac{i11\pi}{6}}\right\}}$

Exercice 3 Ra pour écriture complexe : $z'-z_0 = e^{\frac{i\pi}{3}}(z-z_0)$

① O a pour affixe 0 donc $a' = e^{\frac{i\pi}{3}}a$, $b' = e^{\frac{i\pi}{3}}b$ et $c' = e^{\frac{i\pi}{3}}c$.

M est le milieu de [A'B] donc $m = \frac{a'+b}{2}$. Donc $m = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}a+b}{2}$

De même $n = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}b+c}{2}$ et $p = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}c+a}{2}$

② $e^{\frac{i\pi}{3}}-1 = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-1 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\underline{e^{\frac{i\pi}{3}}-1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}}$.

③ $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z = n-m = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}b+c-e^{\frac{i\pi}{3}}a-b\right) = \frac{1}{2}\left(b\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right)+c-e^{\frac{i\pi}{3}}a\right)$.

$z' = p-m = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}c+a-e^{\frac{i\pi}{3}}a-b\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}c-b+a\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}c-b-ae^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$.

On a : $e^{\frac{i\pi}{3}}z = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{3}}\left(be^{\frac{2i\pi}{3}}+c-e^{\frac{i\pi}{3}}a\right)$

$= \frac{1}{2}\left(be^{\frac{3i\pi}{3}}+ce^{\frac{i\pi}{3}}-e^{\frac{2i\pi}{3}}a\right) = \frac{1}{2}\left(be^{i\pi}+ce^{\frac{i\pi}{3}}-ae^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$

$\underline{e^{\frac{i\pi}{3}}z = z'}$ car $e^{i\pi} = -1$.

④. $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$MN = |z|$ et $MP = |z'| = \left|e^{\frac{i\pi}{3}}z\right| = \left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right||z| = |z|$

donc $MN = MP$.

Ainsi MNP est isocèle en M d'angle principal $\frac{\pi}{3}$ donc $\underline{\text{MNP est équilatéral}}$

Exercice 4 : Soit $z \in \mathbb{C}$. $f(z)$ est de la forme $f(z) = az+b$

avec $a = \frac{1}{2}(1+e^{i\alpha}) = \frac{1}{2}e^{i\alpha/2}\left(e^{-\frac{i\alpha}{2}}+e^{\frac{i\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{i\alpha}{2}}\times 2\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}e^{\frac{i\alpha}{2}}$

et $b = 2e^{i\alpha}$

- si $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = b = 2e^{i\alpha}$. f est une fonction constante
- si $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ alors f est une similitude directe
  - si $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$ alors $|a| = \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \cos\frac{\alpha}{2}$ et $\arg(a) \equiv \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$
    donc f a pour rapport $\cos\frac{\alpha}{2}$ et pour angle $\frac{\alpha}{2}$ par exemple
  - si $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$ alors $|a| = \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = -\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\arg(a) \equiv \frac{\alpha}{2}+\pi\ [2\pi]$
    puisqu'alors $a = \cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}} = -\cos\frac{\alpha}{2}\times(-1)\times e^{i\frac{\alpha}{2}} = -\cos\frac{\alpha}{2}\times\underbrace{e^{i\pi}e^{i\frac{\alpha}{2}}}_{=e^{i\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}}$
    donc f a pour rapport $-\cos\frac{\alpha}{2}$ et pour angle $\frac{\alpha}{2}+\pi$ par ex

Dans ces deux cas, f a pour centre le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$

$\omega = \frac{2e^{i\alpha}}{1-\frac{1}{2}(1+e^{i\alpha})} = \frac{2e^{i\alpha}}{\frac{1}{2}(1-e^{i\alpha})} = 4\frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = 4\frac{e^{i\alpha}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{i\alpha}{2}}-e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)}$ $\boxed{\omega = \frac{2i}{\tan\frac{\alpha}{2}}-2}$

$\omega = \frac{4e^{i\alpha/2}}{2i\sin(-\alpha/2)} = 2e^{\frac{i\alpha}{2}}\times\frac{1}{-i\sin\alpha/2} = 2ie^{\frac{i\alpha}{2}}\times\frac{1}{\sin\alpha/2} = 2i\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\times\frac{1}{\sin\alpha/2}$