Ex 14

Rq loi bien définie sur E car $|xy| < 1$ donc $1 + xy > 0$.

$-1 < x * y < 1$ $\quad]-1, 1[$

1. $(E, *)$ est 1 gpe commutatif car

- $*$ est 1 LCI

$\forall (x,y) \in E^2$, $x * y \in E$. $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x * y > 0 \\ 1 + x * y > 0. \end{cases}$

$-1 < x < 1$
$-1 < y < 1$
$-1 < xy < 1$

$$1 - x * y = \frac{1 + xy - x - y}{1 + xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0$$

$$1 + x * y = \frac{1 + xy + x + y}{1 + xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0.$$

- $*$ est commutative
- $*$ assoc $\forall (x,y,z) \in E^2$

$$(x * y) * z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$$

- $*$ a 1 élt neutre 0 dans E

$$x * 0 = \frac{x+0}{1+x.0} = x = 0 * x$$

- $\forall x \in E$, x a 1 sym pour $*$ dans E: $-x \in E$.

$$x * (-x) = \frac{x + (-x)}{1 - x^2} = \frac{0}{1-x^2} = 0.$$

2. il suffit de mq ϕ est 1 morp bijectif de E dans $\mathbb{R}$.
ϕ est bien définie sur E car si $x \in E$, $|x| < 1$ $\quad 1 + x > 0$ et $1 - x > 0$
$\forall (x,y) \in E^2$, mq $\phi(x * y) = \phi(x) + \phi(y)$.

$$\phi(x * y) = \ln\left(\frac{1 + \frac{x+y}{1+xy}}{1 - \frac{x+y}{1+xy}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}\right) = \ln\left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)\ (1-y)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \phi(x) + \phi(y)$$

ϕ est 1 morp de gpes de $(E, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Reste à mq ϕ est 1 bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
ϕ est dérivable sur $]-1,1[$ et
d'1 part $\phi'(x) = \dfrac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \dfrac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x}{1+x} \dfrac{2}{(1-x)^2}$

$$= \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} > 0 \quad \forall x \in]-1;1[$$

ϕ est strict croissante sur $]-1,1[$ et continue sur $]-1,1[$
D'après le théorème de la bijection,
Elle définit 1 bijectⁿ de $]-1,1[$ sur $\varphi(]-1,1[) =]\lim_{x \to -1^+} \varphi(x), \lim_{x \to 1^-} \varphi(x)[$
$= \mathbb{R}$.

Ex 16 TD12 Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

Soit $I = \{x \in A \,/\, x \text{ est inversible}\}$.

Mq $(I, \times)$ est un groupe.

- $\times$ est une LCI dans I

  car $\forall x \in I \ \forall y \in I$, et $\left| \begin{array}{l} xy \in A \\ xy \text{ est inversible d'inverse } y^{-1}x^{-1} \end{array} \right.$

  et $y^{-1}x^{-1} \in I$ car $y^{-1}x^{-1}$ est inversible d'inverse xy

  Donc $xy \in I$

- $\times$ est associative dans A donc dans I

- $\times$ a un élt neutre dans I : 1_A

  car $1_A \times 1_A = 1_A$ donc 1_A est inversible (d'inverse lui-même)

- tout élément x de I est inversible dans I

  en effet son inverse est x^{-1} et $x^{-1} \in I$ car x^{-1} est inversible d'inverse x. $\left((x^{-1})^{-1} = x \right)$

<u>Concl</u> : $(I, \times)$ est un groupe.