th 1-1-c

Si f est minorée alors $\{f(x), x \in]a,b[\} = f(]a,b[)$ aussi

donc $f(]a,b[)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée donc elle

admet une borne inférieure ℓ'. Mq $\lim\limits_{a^+} f = \ell'$.

Soit $\varepsilon > 0$ but : trouver $\eta > 0$ tq $\forall x \in]a,b[, x \in]a, a+\eta[\Rightarrow |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon$

Comme $\ell' = \inf(f(]a,b[))$, $\ell' + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $f(]a,b[)$.

Donc non ($\ell' + \varepsilon$ est un minorant de $f(]a,b[)$)

donc non ($\forall y \in f(]a,b[), \ y \geq \ell' + \varepsilon$)

donc non ($\forall x \in]a,b[, \ f(x) \geq \ell' + \varepsilon$) donc il existe

$x_0 \in]a,b[, \ f(x_0) < \ell' + \varepsilon$.

Soit maintenant $x \in]a,b[$ tq $x < x_0$.

Comme f est croissante sur $]a,b[$, $f(x) \leq f(x_0)$.

On a donc $f(x) \leq f(x_0) < \ell' + \varepsilon$ donc $f(x) < \ell' + \varepsilon$

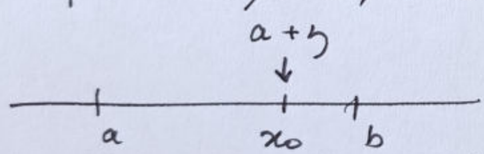
De plus $\ell' = \inf(f(]a,b[))$ donc ℓ' est un minorant de $f(]a,b[)$

donc $\ell' \leq f(x)$ et $\ell' - \varepsilon < \ell'$ car $\varepsilon > 0$ donc $\ell' - \varepsilon < f(x)$

Ainsi,

on a mq il existe $x_0 \in]a,b[$ tq $\forall x \in]a,b[, x < x_0 \Rightarrow \ell' - \varepsilon < f(x) < \ell' + \varepsilon$

On pose $a + \eta = x_0$, càd $\eta = x_0 - a > 0$ (car $x_0 > a$)



on a donc l'existence d'un $\eta > 0$ tq $\forall x \in]a,b[, x \in]a, a+\eta[\Rightarrow |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon$

th 1-1-d- Supposons que f est non minorée et mq $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.

Soit $A > 0$ But: On veut trouver $\eta > 0$ tq $\forall x \in]a,b[, x \in]a, a+\eta[\Rightarrow f(x) < -A$

Comme f n'est pas minorée,

$f(]a,b[)$ n'est pas minorée, càd non ($f(]a,b[)$ minorée)

donc non ($\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, \ f(x) \geq m$)

donc $\forall m \in \mathbb{R}, \ \exists x \in]a,b[, \ f(x) < m$.

On prend $m = -A$: il existe $x_0 \in]a,b[$ tq $f(x_0) < -A$

Soit $x \in]a,b[$ tq $x < x_0$ alors $f(x) \leq f(x_0) < -A$ car f est

croissante sur $]a,b[$. Posons $\eta = x_0 - a > 0$. On a donc :

$\forall x \in]a,b[, \ x \in]a, a+\eta[\Rightarrow f(x) < -A$ Concl : $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$