Ex 13

① Soit f un morphisme du groupe $(E, *)$ vers le groupe $(F, \perp)$
Soit g un morphisme du groupe $(F, \perp)$ vers le groupe (G, ∇).

Mq $g \circ f$ est un morphisme du groupe $(E, *)$ vers le groupe (G, ∇).

Soi $(a, b) \in E^2$,

$$g \circ f(a * b) = g(f(a*b)) \underset{f \text{ est un morphisme}}{=} g(f(a) \perp f(b)) \underset{g \text{ est un morphisme}}{=} g(f(a)) \nabla g(f(b))$$

en posant $A = f(a) \in F$
$B = f(b) \in F$
$g(A \perp B) = g(A) \nabla g(B)$

donc $g \circ f(a * b) = g \circ f(a) \nabla g \circ f(b)$

donc $g \circ f$ est un morphisme

② Soit f un isomorphisme du groupe $(E, *)$ vers le groupe $(F, \perp)$
f est donc un morphisme bijectif. Soit f^{-1} l'appl réc de f
Mq f^{-1} est un morphisme (on sait déjà que f^{-1} est bijective).

Soient y_1 et y_2 2 élts de F. On veut mq :

$$f^{-1}(y_1 \perp y_2) = f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2).$$

D'une part, $f(f^{-1}(y_1 \perp y_2)) = y_1 \perp y_2$

D'autre part, $f(f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2)) \underset{f \text{ est un morphisme en posant } y_1 = f^{-1}(y_1),\ y_2 = f^{-1}(y_2)}{=} f(f^{-1}(y_1)) \perp f(f^{-1}(y_2))$

$= y_1 \perp y_2$

Donc $f(f^{-1}(y_1 \perp y_2)) = f(f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2))$

Donc $f^{-1}(y_1 \perp y_2) = f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2)$ car f est bij donc inj.

Ainsi f^{-1} est un isomorphisme du groupe $(F, \perp)$ vers le groupe $(E, *)$.

TD12 - exc 12

q1- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $x^n = 0$

puisque $1.x = x.1 = x$, si on note $z = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$

$1 = 1 - x^n = 1^n - x^n = (1-x)z = z(1-x)$.

donc $(1-x)$ est inversible et son inverse est égal à $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

Remarques pour la question 2 :

(1) • Mq si $ab = ba$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $ab^n = b^n a$, par récurrence.

- pour $n = 0$, la prop est évidente car $b^0 = 1$ donc $ab^0 = b^0 a$.
- on suppose que $ab^n = b^n a$ pour 1 entier n fixé

$ab^{n+1} = ab^n.b = (ab^n)b = (b^n a)b = b^n(ab) = b^n(ba) = b^n b a = b^{n+1} a$.

- concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $ab^n = b^n a$.

(2) • Mq si $ab = ba$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(ab)^n = a^n b^n$.

- pour $n = 0$, la prop est évidente car elle s'écrit $1 = 1$
- si elle est vraie au rang n, alors

$(ab)^{n+1} = (ab)^n (ab) = a^n b^n (ba) = a^n (b^n b) a = a^n b^{n+1} a$

$= a^n (b^{n+1} a) = a^n (ab^{n+1}) = (a^n a) b^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$.

- concl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(ab)^n = a^n b^n$

→ on va mq $a+b$ est inversible en tant que produit de 2 élts inversibles

q2- • $a + b = a(1 + a^{-1}b) = a(1 - z)$ avec $z = (-a)^{-1} b$. mq z nilpotent

- $ab = ba \Rightarrow ba^{-1} = a^{-1}(ab)a^{-1} = a^{-1}(ba)a^{-1} = a^{-1}b(aa^{-1}) = a^{-1}b$

donc $b(-a^{-1}) = -ba^{-1} = -a^{-1}b = (-a^{-1})b$.

- b est nilpotent $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / b^n = 0$.

$(-a^{-1}b)^n \xrightarrow{\text{d'après (2)}} = (-a^{-1})^n b^n = 0$. donc z est nilpotent.

donc $1 - z$ est inversible d'inverse égal à : $1 = 1 - z^n = 1^n - z^n = (1-z)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-a^{-1}b)^k\right)$

$(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-a^{-1}b)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-a^{-1})^k b^k$

$(a+b)$ est donc produit de 2 élts inversibles donc $(a+b)$ est inversible

$(a+b)^{-1} = (a(1-z))^{-1} = (1-z)^{-1} a^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (a^{-1})^k b^k a^{-1}$

Comme a^{-1} et b^k permutent (car a et b permutent) d'après (1)

on obtient $(a+b)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (a^{-1})^{k+1} b^k$.

q3- Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ tq $a^n = 0$ et $b^p = 0$.

On mq que $a^k = 0$ si $k \geq n$ et $b^k = 0$ si $k \geq p$

Comme $ab = ba$, on peut utiliser le binôme de Newton

$$(a+b)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} a^k b^{n+p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+p}{k} a^k b^{n+p-k} + \sum_{k=n}^{n+p} \binom{n+p}{k} a^k b^{n+p-k}$$

pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $n+p-k \geqslant p$ donc $b^{n+p-k} = 0$

Si $k \geqslant n$ $a^k = 0$

donc $(a+b)^{n+p} = 0$ et $a+b$ est nilpotent.

- si $q = \min(n, p)$ et $ab = ba$, $(ab)^q = a^q b^q = 0$ donc ab est nilpotent.

4- $\exists n \in \mathbb{N}^* \,/\, (ab)^n = 0$ donc $b(ab)^n a = 0$, c'est-à-dire $(ba)^{n+1} = 0$ d'après l'associativité de la loi. $\Rightarrow$ ba est nilpotent.