Ex 8 TD12

① Fait en classe

② Soit $(z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2$

$$N(zz') = (zz')(\overline{zz'}) \overset{\text{conjugué d'un produit}}{=} zz'\bar{z}\bar{z}' \overset{\times \text{ commutative dans } \mathbb{Z}}{=} z\bar{z}z'\bar{z}' \overset{\times \text{ associative dans } \mathbb{Z}}{=} (z\bar{z})(z'\bar{z}')$$
$$= N(z) \times N(z')$$

③ Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$

z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ ssi $\exists z' \in \mathbb{Z}[i]$ tq $zz' = z'z = \underset{\text{neutre pour } \times}{1}$

Supposons que z' est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$

alors $\exists z' \in \mathbb{Z}[i]$ tq $zz' = 1$ donc $N(zz') = N(1)$

donc $N(z)N(z') = 1\bar{1} = 1$

donc $N(z)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$

donc $N(z) = \pm 1$

or $N(z) \geqslant 0$ donc $N(z) = 1$

or $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

donc $N(z) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

donc $a^2 = 1$ et $b^2 = 0$ ou $a = 0$ et $b^2 = 1$

donc $(a = \pm 1$ et $b = 0)$ ou $(a = 0$ et $b = \pm 1)$

donc $z = 1$ ou -1 ou i ou $-i$

Réciproquement, si $z = 1$ alors z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ d'inverse 1

Si $z = -1$ ——— -1

Si $z = i$ ——— $-i$

Si $z = -i$ ——— i

puisque $1 \times 1 = 1$, $-1 \times (-1) = 1$, $i \times (-i) = 1$ et $(-i) \times i = 1$ et $\times$ commutative dans $\mathbb{Z}$.

Concl : les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont : $1, -1, i$ et $-i$.

Ex 4 TD12

① . $(1+i)\mathbb{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{C}$

. Soit $z \in (1+i)\mathbb{R}$ et $z' \in (1+i)\mathbb{R}$. Mq $z+(-z') \in (1+i)\mathbb{R}$

il existe $a \in \mathbb{R}$ tq $z=(1+i)a$
il existe $a' \in \mathbb{R}$ tq $z'=(1+i)a'$ } alors $z+(-z') = (1+i)a + (-(1+i)a')$

$z+(-z') = (1+i)a-(1+i)a' = (1+i)(a-a') = (1+i)a''$ en posant $a''=a-a'$

ainsi $a'' \in \mathbb{R}$ et $z+(-z') \in (1+i)\mathbb{R}$

. Concl : $((1+i)\mathbb{R},+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ donc c'est un groupe

② $0 \in (1+i)\mathbb{R}$ car $0=(1+i)\times 0$

or 0 n'a pas d'inverse pour $\times$ dans $\mathbb{C}$

donc $((1+i)\mathbb{R},\times)$ n'est pas un groupe

NB : on pourrait aussi dire que $\times$ n'est pas une LCI dans $(1+i)\mathbb{R}$.

En effet, $(1+i)1 \times (1+i)1 = (1+i)^2 = 2i$ et $2i \notin (1+i)\mathbb{R}$

NB2 : on pourrait aussi dire que le neutre pour $\times$, 1, n'appartient pas à $(1+i)\mathbb{R}$

③ On a montré en cours que $(\mathbb{U},\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$ donc c'est un groupe.

Mq $(R_\Omega,\circ)$ est un sous-groupe du groupe des bijections du plan.

. R_Ω est une partie non vide du grp des bij du plan
(par ex id est une rotation de centre Ω et d'angle 0 ou 2π)

. Soient r et r' 2 rotations du plan de centre commun Ω et d'angles respectifs $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$. Mq $r \circ r'^{-1}$ est une rotation du plan de centre Ω

Soit M un point qcque du plan. On note $M_1 = r'^{-1}(M)$ et $M_2 = r(M_1)$

on a $\begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M_2 \\ (\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M_2}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1}) \equiv -\theta'\,[2\pi] \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} \Omega M = \Omega M_2 \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_2}) = (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1}) + (\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M_2}) \equiv -\theta'+\theta\,[2\pi] \end{cases}$

rel de Chasles pour les angles de vecteurs

Donc $r\circ r'^{-1}$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\theta-\theta'$

donc $r\circ r'^{-1} \in R_\Omega$ et Concl : $(R_\Omega,\circ)$ est un sous-groupe du groupe des bijections du plan donc c'est un groupe.

. Mq $\varphi : \begin{array}{l} R_\Omega \to \mathbb{U} \\ r \mapsto e^{i\theta} \end{array}$, où θ est une mesure de l'angle de r, est un morphisme

$\forall (r,r') \in R_\Omega^2$, $\varphi(r\circ r') = e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} = \varphi(r)\times\varphi(r')$, où θ est une mesure de l'angle de r et θ' une mesure de l'angle de r'

Donc φ est un morphisme de groupes.

Mq ϕ est bijective

- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$ donc $z = \phi(r)$ où r est la rotation de centre Ω et d'angle θ
  Ainsi on a mq $\forall z \in \mathbb{U}, \exists r \in R_\Omega$ tq $z = \phi(r)$
  donc ϕ est surjective
- Soient $r \in R_\Omega$ d'angle θ et $r' \in R_\Omega$ d'angle θ'.
  Supposons $\phi(r) = \phi(r')$ alors $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Rightarrow \theta \equiv \theta' \, [2\pi]$
  Donc r et r' ont même angle modulo 2π et même centre
  Donc $r = r'$
  Donc ϕ est injective

Ainsi ϕ est un isomorphisme de groupes de $(R_\Omega, \circ)$ sur $(\mathbb{U}, \times)$ et ces 2 groupes sont donc isomorphes

Csqce pratique : cet isomorphisme est utile pour remplacer un travail de nature géométrique en un travail de nature algébrique.