

Ex Cours chap 13 page 6

• Si $x > 0$ $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{3/2}}}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

• Soit $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 3x + x} = \frac{1 - \frac{\sin x}{\sin 3x}}{1 + \frac{x}{\sin 3x}} = \frac{1 - \frac{\sin x}{x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{3}}{1 + \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{3}}$$

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$

Ex sous P15. Soit f de finis sur I . On suppose que f est continue et positive en $x_0 \in I$ et $f(x_0) > 0$

Ma $\sqrt{f}$ est continue en x_0 .

Il s'agit ici d'utiliser P14-7.

En effet $h = \sqrt{f}$ est la composée de $g: x \mapsto \sqrt{x}$ avec f .

On sait que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$.

Reste à ma g est continue en $f(x_0)$. Posons $y_0 = f(x_0)$

Cela revient à ma g est continue en tout $y_0 \in \mathbb{R}_*^+$, c'est que g admet une limite en y_0 et que cette limite vaut $\sqrt{y_0} = g(y_0)$

Soit $\varepsilon > 0$ but: trouver $\eta > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|x - y_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y_0)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y_0)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{y_0}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y_0})(\sqrt{x} + \sqrt{y_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{y_0}} \right| = \left| \frac{x - y_0}{\sqrt{x} + \sqrt{y_0}} \right| \\ &= \frac{|x - y_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{y_0}} \stackrel{y_0 \neq 0}{\leq} \frac{|x - y_0|}{\sqrt{y_0}} \quad \text{puisque } \sqrt{x} + \sqrt{y_0} \geq \sqrt{y_0} > 0 \end{aligned}$$

on choisit de prendre $\eta = \sqrt{y_0} \varepsilon$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|x - y_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y_0)| \leq \frac{|x - y_0|}{\sqrt{y_0}} < \frac{\eta}{\sqrt{y_0}} = \frac{\sqrt{y_0} \varepsilon}{\sqrt{y_0}} = \varepsilon$

Donc g est continue en $f(x_0)$

Donc d'après P14.7, $g \circ f$ est continue en x_0 donc $\sqrt{f}$ continue en x_0

Ex sous P16. Raisonnons par l'absurde

Supposons que f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$ • Cas 2: $a \in \mathbb{Q}$ à faire seul en utilisant que $\mathbb{R}$ a deux dens dans $\mathbb{R}$

• Cas 1: $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Alors comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite u_n d'élts de $\mathbb{Q}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$. (puisque $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$)

On a donc: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$ donc $f(u_n) = u_n^2 + 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 + 1)$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)^2 + 1 = a^2 + 1$.

De plus, par P16, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$ car f continue en a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$

Ainsi, comme $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $f(a) = a$ et donc on obtient $a^2 + 1 = a$

or $a^2 + 1 = a$ n'a pas de sol réelle ($\Delta < 0$) donc on obtient une contradiction