

Chapitre 13 : Fonctions : limite d'une fonction et continuité en un point

1 Etude locale d'une fonction

1.1 Propriété vraie au voisinage de a

Définition 1 (Voisinage d'un point).

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. On appelle **voisinage** de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme :

1. si $a \in \mathbb{R}$, $]a - \eta, a + \eta[$ avec $\eta > 0$,
2. si $a = +\infty$, $]\eta, +\infty[$ avec $\eta > 0$,
3. si $a = -\infty$, $]-\infty, \eta[$ avec $\eta > 0$.

$]a - \eta, a + \eta[$ est appelé intervalle ouvert de centre a et de rayon η .

Les voisinages de $a \in \mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ qui contiennent un intervalle ouvert de centre a . Un intervalle ouvert de centre a est donc lui aussi un voisinage de a .

Par ailleurs pour $x \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$, $x \in]a - \eta, a + \eta[$ ssi $|x - a| < \eta$.

► Exemple : $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont contenus par tout voisinage de a à partir d'un certain rang.

Définition 2 (Propriété vraie au voisinage de a).

On dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur E est **vraie au voisinage de a** s'il existe un voisinage de a tel que la propriété est vraie sur l'intersection de E avec ce voisinage de a .

Définition 3 (Fonction définie au voisinage de a).

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f est **définie au voisinage de a** lorsque

- si $a \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\setminus \{a\} \subset E$ (il existe un voisinage V de a tels que $V \setminus \{a\} \subset E$)
- si $a = +\infty$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset E$
- si $a = -\infty$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset E$

Remarque 1. Si $a \in \mathbb{R}$, f est définie au voisinage de a à gauche si $\exists \eta > 0$ tel que $]a - \eta, a[\setminus \{a\} \subset E$ et f est définie au voisinage de a à droite si $\exists \eta > 0$ tel que $]a, a + \eta[\setminus \{a\} \subset E$.

Si $a \in \mathbb{R}$, f est définie au voisinage de a implique que f est définie au voisinage de a à droite et à gauche.

Ne pas confondre 'f est définie au voisinage de a' et 'f est définie sur un voisinage de a' qui veut dire qu'il existe un voisinage V de a tel que $V \subset E$ (c'est-à-dire E est un voisinage de a). La seconde affirmation implique la première mais la réciproque est fausse.

► Exemple : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de 0. $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie au voisinage de $+\infty$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x - 5}$

est définie au voisinage de $\pm\infty$. $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas au voisinage de 0 car il n'existe pas d'intervalle ouvert centré en 0 tel que $I \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^+$.

1.2 Limites finies

On va étendre dans ce qui suit la notion de limite d'une suite réelle introduite au chapitre 11 à une fonction réelle définie sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 4.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet l pour limite en $a \in \mathbb{R}$ si f est définie au voisinage de a et vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si f est définie au voisinage de $+\infty$ et vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in E, x > A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si f est définie au voisinage de $-\infty$ et vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in E, x < -A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Remarque 2. Dans les trois cas le réel l est unique. Si on suppose maintenant $a \in \bar{\mathbb{R}}$, on note :

$$l = \lim_a f \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

- Exemple : $x \mapsto x - a$ tend vers 0 en a .
- Exemple : La fonction carrée tend vers 0 en 0.
- Exemple : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.
- Exemple : La fonction $x \mapsto \exp x$ tend vers 0 en $-\infty$.
- Exemple : La fonction $x \mapsto l$ admet pour limite l en tout point de $\mathbb{R}$ et en $\pm\infty$.
- Exemple : La fonction $x \mapsto (x - 1)^{-2}$ admet pour limite 0 en $\pm\infty$.

Remarque 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - l) = 0$.

Si $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = l$.

Définition 5 (Fonction continue en a).

Si une fonction f , définie en a , admet une limite finie en a , celle-ci est égale à $f(a)$. On dit alors que f est **continue en a** .

Remarque 4. Si une fonction f est définie en a , la fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a .

- Exemple : Toute fonction affine est continue en tout point.

Définition 6 (Prolongement par continuité).

Soit $f : E \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_a f = l \in \mathbb{R}$ alors la fonction $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}, x \neq a \mapsto f(x)$ et $a \mapsto l$ est continue en a . $\tilde{f}$ s'appelle **prolongement par continuité de f en a** .

Remarque 5. Si a est une extrémité de E n'appartenant pas à E , f admet une limite finie en a si et seulement si elle est prolongeable par continuité en a .

- Exemple : $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$. Si on pose $f(0) = 1$, f est continue en 0.

Propriété 1.

Si f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ alors elle est bornée au voisinage de a . Cela signifie qu'il existe $h > 0$ tel que la restriction de f à $]a - h, a + h[\cap E \setminus \{a\}$ est bornée.

Propriété 2.

Si f admet une limite l non nulle en a alors f est non nulle au voisinage de a et du signe de l .

Remarque 6. Si f admet $l > 0$ pour limite en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ alors f est minorée par $\frac{l}{2} > 0$ au voisinage de a .

Si f admet $l < 0$ pour limite en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ alors f est majorée par $\frac{l}{2} < 0$ au voisinage de a .

Les propriétés 1 et 2 restent vraies si $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

Si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a .

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 7.

Une fonction f est dite **définie à droite du réel a** si pour tout $\eta > 0$, $]a, a + \eta[\cap E \neq \emptyset$.

Une fonction f est dite **définie à gauche du réel a** si pour tout $\eta > 0$, $]a - \eta, a[\cap E \neq \emptyset$.

► Exemple : $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}}$ est définie à droite de 0. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ est définie à gauche de 3. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie à gauche et à droite de 0. Une fonction qui est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ à droite est définie à droite de a .

Définition 8.

Soit f une fonction définie à droite du réel a . On dit que f a une **limite à droite** $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en a si la restriction de f à $E \cap]a, +\infty[$ admet une limite égale à l lorsque x tend vers a . On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{a^+} f = l.$$

Soit f une fonction définie à gauche du réel a . On dit que f a une **limite à gauche** $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en a si la restriction de f à $E \cap]-\infty, a[$ admet une limite égale à l lorsque x tend vers a . On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{a^-} f = l.$$

Propriété 3.

Soit f une fonction définie à droite du réel a . Alors f a une limite à droite $l \in \mathbb{R}$ en a ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, x \in]a, a + \eta[\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Soit f une fonction définie à gauche du réel a . Alors f a une limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ en a ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, x \in]a - \eta, a[\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Propriété 4.

Soit f une fonction définie à droite et à gauche du réel a **mais pas en a** et $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors f a une limite égale à l en a ssi f a une limite à gauche de a et une limite à droite de a , toutes deux égales à l .

Une fonction f définie à droite et à gauche du réel a peut ne pas admettre de limite en a mais admettre uniquement une limite à droite ou une limite à gauche en a ou toutes les deux à la fois (distinctes).

► Exemple : $x \mapsto 2x - \frac{|x|}{x}$.

Définition 9.

Soit f une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ et à droite du réel a . On dit que f est **continue à droite en a** si la restriction de f à $E \cap]a, +\infty[$ est continue en a c'est-à-dire ssi $\lim_{a^+} f = f(a)$.

Soit f une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ et à gauche du réel a . On dit que f est **continue à gauche en a** si la restriction de f à $E \cap]-\infty, a[$ est continue en a c'est-à-dire ssi $\lim_{a^-} f = f(a)$.

Propriété 5.

Soit f une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ et à gauche et à droite du réel a . Alors f est continue en a ssi elle est continue à gauche et à droite en a .

Une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ à droite et à gauche de a peut être continue à droite ou à gauche en a sans être continue en a .

► Exemple : $x \mapsto (x - E(x))^2$. $E = \mathbb{R}$. Continuité en $n \in \mathbb{Z}$?

1.4 Limites infinies

Définition 10.

On dit que f **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f = +\infty$ lorsque f est définie au voisinage de a et

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

On dit que f **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $+\infty$ et

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

On dit que f **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $-\infty$ et

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, x < -B \Rightarrow f(x) > A.$$

Définition 11.

On dit que f **tend vers** $-\infty$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$ lorsque f est définie au voisinage de a et

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < -A.$$

On dit que f **tend vers** $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $+\infty$ et

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, x > B \Rightarrow f(x) < -A.$$

On dit que f **tend vers** $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $-\infty$ et

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$$

► Exemple : Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

► Exemple : Soit $f : x \mapsto (x - 1)^{-2}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

1.5 Propriété des limites

1.5.1 Fonction positive ou négative

Propriété 6 (Stabilité des inégalités larges par passage à la limite).

Si $\forall x \in E \setminus \{a\}, f(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $l \geq 0$.

Si $\forall x \in E \setminus \{a\}, f(x) \leq 0$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $l \leq 0$.

Propriété 7.

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, positive et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = l$, alors $l \geq 0$.
 Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, négative et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = l$, alors $l \leq 0$.

1.5.2 Comparaison**Propriété 8 (Théorème de comparaison).**

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Si au voisinage de a on a $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $l \geq l'$.

En particulier, si $\lim_{x \rightarrow a} g = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$ (théorème de minoration) et si $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g = -\infty$ (théorème de majoration).

Propriété 9 (théorème d'encadrement des limites).

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Soient f, g, h trois applications définies au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Si au voisinage de a on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{x \rightarrow a} h = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g = l$.

En particulier, si $|f(x)| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

1.5.3 Fonction monotone**Théorème 1 (Théorème de la limite monotone).**

Soit f définie sur $]a, b[$ avec $a < b$.

1. Si f est croissante sur $]a, b[$
 - si f est **majorée** alors f a une limite finie quand x tend vers b^- et $\lim_{x \rightarrow b^-} f = \sup_{]a, b[} f$.
 - si f est non majorée alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers b^- .
 - Si f est **minorée** alors f a une limite finie quand x tend vers a^+ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \inf_{]a, b[} f$.
 - si f est non minorée alors f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a^+ .
2. Si f est décroissante sur $]a, b[$
 - si f est **minorée** alors f a une limite finie quand x tend vers b^- et $\lim_{x \rightarrow b^-} f = \inf_{]a, b[} f$.
 - si f est non minorée alors f tend vers $-\infty$ quand x tend vers b^- .
 - Si f est **majorée** alors f a une limite finie quand x tend vers a^+ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \sup_{]a, b[} f$.
 - si f est non majorée alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a^+ .

1.6 Opérations sur les limites

Propriété 10 (Composition).

Soient E et F deux intervalles non réduits à un singleton. Soient $a \in E$ et $b \in F$.
 Soient enfin $f : E \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : F \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in E \setminus \{a\}, f(x) \in F \setminus \{b\}$.
 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$

Remarque 7. — Le résultat reste vrai si on remplace l par $\pm\infty$ ou a par $\pm\infty$ ou b par $\pm\infty$
 — Si f est continue en a et g continue en b et $f(a) = b$ alors $g \circ f$ est continue en a .

Propriété 11 (Somme, produit, produit par un scalaire).

Soient E un intervalle non réduit à un singleton. Soient $a \in E$ et f et $g : E \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$.
 On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l',$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = ll',$$

$$\forall k \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} (kf)(x) = kl,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|,$$

Si $l \neq 0$, $\exists h > 0$, $\forall x \in E \setminus \{a\} \cap]a - h, a + h[$, $f(x) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{l}$.

Remarque 8. Les résultats restent vrais si on remplace a par $\pm\infty$.

L'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ stable par produit.

Si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a .

► Exemple : Soit f telle que $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x \leq 0$. Alors f n'a pas de limite en 0 mais $|f|$ a une limite en 0.

Autres cas : voir tableau.

► Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

► Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

► Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 3x + x}$.

Propriété 12.

Le produit d'une fonction bornée avec une fonction de limite nulle est une fonction de limite nulle.

1.7 Lien entre limite de fonction et limite de suite**Théorème 2 (Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a).**

Soit f définie sur $E \setminus \{a\}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $E \setminus \{a\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.
 Alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 9. Le résultat est valable si $l = \pm\infty$ ou $a = \pm\infty$.

Il sert souvent à montrer que'une fonction n'admet pas de limite en a : il suffit de trouver une suite convergeant vers a dont l'image ne converge pas.

De même, pour montrer la discontinuité d'une fonction f en a , on trouve une suite qui converge vers a et dont l'image ne converge pas vers $f(a)$.

► Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existe-t-elle ?

Propriété 13 (Caractérisation séquentielle¹ de la limite d'une fonction).

Soit f définie sur $E \setminus \{a\}$. f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en a ssi l'image par f de toute suite de E convergeant vers a est une suite convergeant vers l .

2 Continuité en un point

Dans cette section, on suppose que I est un intervalle non réduit à un élément et que $x_0 \in I$. Soit f définie sur I .

On précise que :

- lorsque f n'est pas continue en x_0 , on dit qu'elle est discontinue en x_0 .
- la continuité d'une fonction f en un point x_0 exige l'appartenance de x_0 à I .

On synthétise ici un certain nombre de propriétés rencontrées dans les paragraphes précédents.

Propriété 14.

1. Si f est continue en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0 .
2. Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule pas et est du signe de $f(x_0)$.
3. Si f est positive sur un voisinage de x_0 (sur $]x_0 - h, x_0 + h[\cap I \setminus \{x_0\} = I_h$) et si f est continue en x_0 alors $f(x_0) \geq 0$.
4. Si f est négative sur un voisinage de x_0 (sur $]x_0 - h, x_0 + h[\cap I \setminus \{x_0\} = I_h$) et si f est continue en x_0 alors $f(x_0) \leq 0$.
5. Si $f \geq g$ au voisinage de x_0 et f et g continues en x_0 alors $f(x_0) \geq g(x_0)$.
6. Si $f \geq g \geq h$ sur I_h et si f , g et h sont continues en x_0 et $f(x_0) = h(x_0)$ alors $g(x_0) = f(x_0) = h(x_0)$.
7. Soit $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, avec I et J deux intervalles non réduits à un élément. Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Propriété 15 (Opérations).

Si f et g sont continues en x_0 et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f + g$, fg , αf , $\alpha f + \beta g$ et $|f|$ sont continues en x_0 .
Si $f(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et continue en x_0 .

► Exemple : Soit f définie sur I , positive et continue en x_0 . On suppose que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\sqrt{f}$ est continue en x_0 .

Remarque 10 (Structure de l'ensemble des fonctions continues en x_0). L'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{R}$ continues en x_0 muni de $+$ et $\cdot$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$. Cela signifie que c'est un sous-ensemble non vide et stable par combinaison linéaire de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Propriété 16 (Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en un point).

Soit f définie sur I et $x_0 \in I$. f est continue en x_0 ssi l'image par f de toute suite de points de I convergeant vers x_0 est une suite convergeant vers $f(x_0)$. Cela peut s'exprimer sous la forme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right).$$

Remarque 11. Cette propriété est un cas particulier de la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction. C'est cette propriété qui est utilisée dans l'étude des suites récurrentes d'ordre 1 (définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$). Elle permet aussi, dans certains cas, de montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

► Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que cette fonction est discontinue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

1. =relatif aux suites

3 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On appelle **partie réelle de f** et on note $\operatorname{Re}(f)$, la fonction $x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$. $\operatorname{Re}(f)$ est définie sur E et est à valeurs réelles.

On appelle **partie imaginaire de f** et on note $\operatorname{Im}(f)$, la fonction $x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$. $\operatorname{Im}(f)$ est définie sur E et est à valeurs réelles.

De plus, $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$.

Si $f = u + iv$ avec u et v à valeurs réelles, la fonction $u - iv$ s'appelle **application conjuguée de f** et est notée $\bar{f}$.

On définit $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re}(f))^2 + (\operatorname{Im}(f))^2} = \sqrt{f\bar{f}}$. $\forall x \in E$, $|f(x)| = |f|(x)$; lorsque f ne s'annule pas, on a $\frac{1}{f} = \frac{\bar{f}}{|f|^2}$.

On dit que f est **bornée** lorsque $|f|$ est majorée.

Propriété 17.

L'ensemble $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ des applications bornées de E vers $\mathbb{C}$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

Définition 12.

On dit que $f \in \mathcal{E}, \mathbb{C}$ admet $\lambda \in \mathbb{C}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $|f - \lambda|$ admet 0 pour limite en a .

Propriété 18.

Soit $f \in \mathcal{E}, \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$
 f admet une limite λ en $a \in \overline{\mathbb{R}} \iff \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ admettent respectivement des limites l_1 et l_2 réelles en a et alors $\lambda = l_1 + il_2$.

Propriété 19.

Toute fonction admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

Remarque 12. Concernant les opérations algébriques, les règles sont les mêmes que pour les applications à valeurs réelles.

Définition 13.

On dit que f est **continue en a** lorsque f admet une limite en a et est définie en a .

Propriété 20 (Caractérisation de la continuité à l'aide des parties réelles et imaginaires).

f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.