

Ex 14

$$l < l'$$

Posons $m = \frac{l+l'}{2}$. On a $u_n \rightarrow l < m$.

Pour $\varepsilon = m - l > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $|u_n - l| < \varepsilon$
 $\forall n \geq n_0$ $-\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$
 $\forall n \geq n_0$ $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$
 $\forall n \geq n_0$ $u_n < m$

on a $v_n \rightarrow l' > m$

Pour $\varepsilon' = l' - m > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1$, $|v_n - l'| < \varepsilon'$
 $\forall n \geq n_1$, $-\varepsilon' < v_n - l' < \varepsilon'$
 $\forall n \geq n_1$ $-\varepsilon' + l' < v_n < \varepsilon' + l'$
 $\underbrace{-\varepsilon' + l'}_m$

Pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, $u_n < m < v_n$.

Ex 19

Pour l'absurde on suppose $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers $l \in \mathbb{R}$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2 \cos n \cos 1$$

$$2l = 2l \cos 1 \Rightarrow l = 0.$$

$$\text{Mais } \cos(2n) = 2 \cos^2 n - 1$$

$$\downarrow$$

$$0 = 2 \cdot 0^2 - 1 \Rightarrow 0 = -1 \text{ absurde}$$

Ex 8 TD 11

Soit $n \geq 1$

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-2n-3+2n+2}{(2n+2)(2n+3)} < 0$$

Donc (u_{2n}) est croissant et (u_{2n+1}) est décroissant

De plus $\forall n \geq 1, u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} > 0$ donc $u_{2n+1} > u_{2n}$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$

Concl: (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

Donc il ex vers la limite commune de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) par le th des suites adjacentes

Ex 4

kg $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+1} = 0$ - Posons $u_n = \frac{n}{n^3+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $\varepsilon > 0$. but: trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > n_0, |u_n| < \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ donc $\frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$

On prend $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

donc u CV vers 0.