

Ex 11:

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } n \in \mathbb{N} \quad 3^{2n+1} + 4^{2n+2} &= 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \\
 &= (3+4) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 3^k 4^{2n-k} \\
 &= 7C \quad \text{où } C = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 3^k 4^{2n-k} \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Deuxième méthode:

$$\begin{aligned}
 3^{2n+1} &= (7-4)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-4)^{2n+1-k} \\
 &= (-4)^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-4)^{2n+1-k} \\
 &= (-4)^{2n+1} + 7 \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^{k-1} (-4)^{2n+1-k}}_D
 \end{aligned}$$

$$3^{2n+1} - (-4)^{2n+1} = 7D \quad D$$

$$3^{2n+1} - (-4)^{2n+1} = 7D$$

$$3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 7D$$

Ex 10 (1) Soit a, b, c, d 4 éléments de A
 $\times$ est commutative dans A et assoc
 $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2adbc + (bc)^2$
 $= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2$
 $= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
 $\times$ distributive
 par rapport à +
 et + est associative
 et commutative

(2) $962 = 13 \times 74$
 $= (9+4)(49+25)$
 $= (3^2+2^2)(7^2+5^2)$
 $= (21-10)^2 + (15+14)^2$
 $= 11^2 + 29^2$