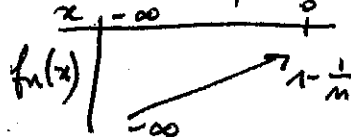


Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ 1) f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^-$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^-$

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, f'_n(x) = 1 - \frac{e^x}{n}$$



$$\text{or } x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow -e^x \geq -1 \Rightarrow \frac{-e^x}{n} \geq -\frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{e^x}{n} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

exp
est croiss
sur $\mathbb{R}$

$$\text{or } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \geq -1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \geq 0 \text{ Donc } f'_n(x) \geq 0.$$

et si $x < 0$, $f'_n(x) > 0$ (f'_n ne s'annule qu'en 0 isolé)Donc f'_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

$$\text{Le plus } f_n(\mathbb{R}^-) = f_n(-\infty, 0] =]-\infty, 1 - \frac{1}{n}] \text{ et } 0 \in]-\infty, 1 - \frac{1}{n}]$$

puisque $1 - \frac{1}{n} > 0$. f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers $]-\infty, 1 - \frac{1}{n}]$.Donc $\exists! x_n \in \mathbb{R}^-$ tq $f_n(x_n) = 0$ par le th de la bijection.

$$2) \text{ Soit } x \leq 0$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n+1} - x - 1 + \frac{e^x}{n} = e^x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \geq 0$$

Donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. En particulier:

$$0 = f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) \text{ donc } f_n(x_n) = 0 \geq f_n(x_{n+1})$$

or f_n^{-1} est strictement croissante sur $]-\infty, 1 - \frac{1}{n}]$ puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ Donc $f_n^{-1}(f_n(x_n)) \geq f_n^{-1}(f_n(x_{n+1}))$ donc $x_n \geq x_{n+1}$ et (x_n) est décroissante.Par le th de croiss monotone, soit (x_n) CV vers une limite finie, soit $(x_n)_{n \geq 1}$ DV vers $-\infty$.
Supposons que (x_n) DV vers $-\infty$.

$$\forall n \geq 1, f_n(x_n) = 0 \text{ donc } x_{n+1} - \frac{e^{x_n}}{n} = 0 \text{ donc } x_{n+1} = \frac{e^{x_n}}{n} - 1$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x_n}}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = -1$$

Absurde!

Concl: (x_n) CV vers une limite finie. Autre méthode: $\forall n, x_{n+1} = \frac{e^{x_n}}{n} - 1 \rightarrow 0$

$$3) \forall n \geq 1, f_n(x_n) = 0 \text{ donc } x_n = \frac{e^{x_n}}{n} - 1 \quad (*)$$

donc $\forall n, x_n > -1$
donc (x_n) minorée par -1
donc par le th lié mon

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Par passage à la limite dans $(*)$ on a (x_n) CV

Obtient: $l = -1$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = e^l$ car exp continu

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x_n}}{n} = 0$ $l = -1$

Et 7 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

• Montrons que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{(n+1)^2 + (n+1)} - (n+1) - (\sqrt{n^2 + n} - n) \\ &= \sqrt{n^2 + 2n + 1 + n + 1} - n - 1 - \sqrt{n^2 + n} + n \\ &= \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n} - 1 \\ &\geq \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n} \stackrel{\text{3e id}}{=} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 2}^2 - \sqrt{n^2 + n}^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n}} \\ &\geq \frac{n^2 + 3n + 2 - (n^2 + n)}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n}} = \frac{2n + 2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n}} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

• Mon (u_n) est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n \stackrel{\text{3e id}}{=} \frac{\sqrt{n^2 + n}^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n}$

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \quad \begin{array}{l} \text{car } n = \sqrt{n^2} \\ \text{puisque } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$\frac{1}{n} > 0$ donc $1 + \frac{1}{n} > 1$ donc $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} > 1$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ str. croiss sur $\mathbb{R}^+$)

$$\text{donc } \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 > 2$$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } u_n < \frac{1}{2}$$

Concl : on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq u_n < \frac{1}{2}$ car $n^2 + n \geq n^2 \geq 0$
donc $\sqrt{n^2 + n} \geq \sqrt{n^2} = n$
donc $\sqrt{n^2 + n} - n \geq 0$.

donc (u_n) est bornée à partir du rang 1

De plus $u_0 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < \frac{1}{2}$

donc (u_n) est bornée.

• (u_n) est croissante et majorée. Par le th de la limite monotone, (u_n) converge. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
donc par composée, somme et quotient, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

Ex 9 D11 Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$z_m - (1+i)z_{m-1} + iz_{m-2} = 0$$

$$x^2 - (1+i)x + i = 0 \quad (Ec)$$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4i = 1 + i^2 + 2i - 4i = (1-i)^2$$

Donc (Ec) a 2 racines complexes conjuguées : $x_1 = \frac{1+i+1-i}{2}$ et $x_2 = \frac{1+i-1+i}{2}$

càd $x_1 = 1$ et $x_2 = i$

D'après le cours, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tq

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad z_m = \alpha 1^m + \beta i^m$$

Déterminons α et β à l'aide des valeurs de $z_0 = 0$ et de $z_1 = 1$

$$\text{on a alors } \begin{cases} z_0 = \alpha 1^0 + \beta i^0 = 0 \\ z_1 = \alpha 1^1 + \beta i^1 = 1 \end{cases} \text{ssi } \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + i\beta = 1 \end{cases} \text{ssi } \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha - i\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} \beta = \frac{-1-i}{2} \\ \alpha = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{1^2-i^2} = \frac{1+i}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall m \in \mathbb{N} \quad z_m = \frac{1+i}{2} + \frac{-1-i}{2} i^m$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad z_m = \frac{1}{2} (1+i - i^m - i^{m+1})$$

Ag : $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est périodique de période 4 :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad z_{4p} = 0$$

$$z_{4p+1} = 1$$

$$z_{4p+2} = 1+i$$

$$z_{4p+3} = i$$

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$

or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = f'(0)$

où $f: x \mapsto \ln(1+x)$ car f est dérivable en 0

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$ car $\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x}$

(forme $\ln u$ avec $u = 1+x$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1$ car exp cont en 1
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}$

Concl $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)}$

or $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{\sin x}{x} \times x\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \ln \frac{\sin x}{x} + x \ln x \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 + 0 = 0$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{y \rightarrow 1} \ln y = \ln 1 = 0$ car $\ln$ cont en 1

et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par cc

Concl $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^0 = 1$ car exp cont en 0.

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sqrt[n]{n^2} = (n^2)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n} \ln n}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ par cc et exp cont en 0

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2 \times \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$

Concl: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \times \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \times \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

or d'après q①, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ donc $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$
par l'usage de limite.

On peut montrer par un raisonnement similaire à q①

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$

Donc $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \times e^{-1}$ par produit des limites

Concl: $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = (e^{-1})^2 = e^{-2}$

⑤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$z_n = \frac{3n^2 + \cos n}{4(n+1)^2 + n \sin 3n} = \frac{\frac{3n^2 + \cos n}{n^2}}{\frac{4(n+1)^2 + n \sin 3n}{n^2}}$$

$$= \frac{3 + \frac{\cos n}{n^2}}{4 \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{n \sin 3n}{n^2}}$$

or $3 + \frac{\cos n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$ car $\frac{\cos n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (ou N° 10)

(produit d'une suite bornée avec une suite qui tend vers 0)

et $4 \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{n \sin 3n}{n^2} \rightarrow 4$ car $\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$\frac{n \sin 3n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (produit d'une suite bornée avec une suite qui tend vers 0)

Donc $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}$, c'ad

$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{3}{4}$

Ex 16 TD 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

or $\forall k \in [n+1, 2n]$, $0 < k \leq 2n$ donc $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

ainsi $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} [2n - (n+1) + 1] = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$

Donc $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
 $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc $H_{n+1} > H_n$

On en déduit que (H_n) est croissante.

D'après le th de la limite monotone, soit (H_n) CV, soit (H_n) DV vers $+\infty$.

Supposons que (H_n) CV. Notons l sa limite.

Puisque (H_n) CV alors par unicité de la limite (H_{2n}) CV vers l et

donc, puisque d'après q1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ on a,

par passage à la limite : $l - l \geq \frac{1}{2}$ c-à-d $0 \geq \frac{1}{2}$ absurde !

Donc (H_n) DV vers $+\infty$.

Ex 17 Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$$

relation de Charles $\left\{ \begin{aligned} &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= 1 \times u_{2n+2} + (-1) u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0 \text{ car } u_{2n+2} < u_{2n+1} \end{aligned} \right.$

Donc (S_{2n}) est décroissante dans le sens où (u_n) est décroissante

D'autre part $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

$$= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

$$= -u_{2n+3} + u_{2n+2} > 0 \text{ car } u_{2n+2} > u_{2n+3} \text{ dans le sens où } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

Donc (S_{2n+1}) est croissante

• Finalement, $S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1}$

or (u_n) a pour limite 0 donc par unicité de la limite $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et donc $(S_{2n+1} - S_{2n})$ CV vers 0.

• et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \leq 0$ car $u_{2n+1} \geq 0$ donc $S_{2n+1} \leq S_{2n}$

Concl: (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes

Par le théorème des suites adjacentes,

(S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes vers la même limite l

et donc (S_n) converge vers l .