Corrigé du DM7 - MPSI - 2023-2024 -

Ex 7 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

- Montrons que $u_{n+1} > u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} > u_n$ ssi $\sqrt{(n+1)^2+n+1} - (n+1) > \sqrt{n^2+n} - n$

ssi $\sqrt{n^2+3n+2} - n - 1 > \sqrt{n^2+n} - n$

ssi $\sqrt{n^2+3n+2} > 1 + \sqrt{n^2+n}$

$x \mapsto x^2$ est st$^t$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\sqrt{n^2+3n+2} \geq 0$ et $1+\sqrt{n^2+n} \geq 0$

ssi $n^2+3n+2 > (1+\sqrt{n^2+n})^2 = 1+n^2+n+2\sqrt{n^2+n}$

ssi $n^2+3n+2-1-n^2-n > 2\sqrt{n^2+n}$

ssi $2n+1 > 2\sqrt{n^2+n}$

$x \mapsto x^2$ st$^t$ crois sur $\mathbb{R}^+$ et $2n+1 > 0$ et $2\sqrt{n^2+n} > 0$

ssi $(2n+1)^2 > 4(n^2+n)$

ssi $4n^2+4n+1 > 4n^2+4n$

ssi $1 > 0$ tjs vrai

donc par remontée d'équivalences, $u_{n+1} > u_n$

donc $(u_n)$ est croissante.

- Mq $(u_n)$ est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n \underset{\text{3e id rq}}{=} \dfrac{\sqrt{n^2+n}^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1}$ car $n = \sqrt{n^2}$ puisque $n \in \mathbb{N}$

$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$\frac{1}{n} > 0$ donc $1+\frac{1}{n} > 1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}} > 1$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ st$^t$ crois sur $\mathbb{R}^+$)

donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 > 2$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} < \dfrac{1}{2}$

donc $u_n < \frac{1}{2}$

Concl : on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < u_n < \frac{1}{2}$ car $n^2+n \geq n^2 > 0$

donc $\sqrt{n^2+n} > \sqrt{n^2} = n$

donc $\sqrt{n^2+n} - n > 0$.

donc $(u_n)$ est bornée à partir du rang 1

De plus $u_0 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < \frac{1}{2}$

donc $(u_n)$ est bornée.

- $(u_n)$ est croissante et majorée. Par le th de la limite monotone, $(u_n)$ converge. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc par composée, somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$