TD 13 : Limite-Continuité ponctuelle

▶ Exercice 1 : Déterminer le comportement de $f(x)$ quand x tend vers a dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x}{2x+|x|}$, $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $a = 0$ et $a = +\infty$
3. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $a = 0$, $a = -1$ et $a = +\infty$
4. $f(x) = e^x - x$, $a = +\infty$.

▶ Exercice 2 :

1. Déterminer le comportement des fonctions suivantes lorsque $x \to 0$: $x \to \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $x \to \dfrac{\sin(2x)}{3x}$, $x \to \dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$.
2. Déterminer le comportement de $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$, celui de $f(x) = (1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ lorsque $x \to 1$ et celui de $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$ lorsque $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

▶ Exercice 3 : Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ en revenant à la définition.

▶ Exercice 4 : Montrer que $x \mapsto \sin x$ est continue en tout point x_0.

▶ Exercice 5 : Montrer que $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

▶ Exercice 6 : Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^2\sin(x)}{x^2+1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

▶ Exercice 7 : Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}(x + E(x))$.

▶ Exercice 8 : Calculer $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$.

▶ Exercice 9 : Soient $a > 0$ et $b > 0$. Déterminer les limites en 0 de $x \mapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$ et $x \mapsto \dfrac{b}{x}\left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor$.

▶ Exercice 10 : En revenant à la définition d'une limite, montrer que $f : \dfrac{ax^2+2x+1}{x+1}$ a pour limite $\dfrac{a+3}{2}$ quand x tend vers 1.

▶ Exercice 11 : Etudier la continuité en $x_0 \in \mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $f(x) = \exp^{\frac{1}{1-x}}$ si $x > 1$ et $f(x) = 0$ sinon.
3. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

▶ Exercice 12 : Démontrer en utilisant la définition de la continuité en un point que la fonction $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+3}$ est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

▶ Exercice 13 : On considère $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$. Cette fonction peut-elle être prolongée par continuité en -1 ou 1 ?

► Exercice 14 : Dans les cas suivants, faut-il étudier la continuité en 0 ou un éventuel prolongement par continuité en 0 de la fonction f ? Faire cette étude.

1. $f(x) = \sin\left(x\left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $f(x) = x\ln x$.
3. $f(x) = \ln x$.
4. $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

► Exercice 15 : Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Démontrer que si f admet une limite en $a \in I$ alors $\exp \circ f$ admet une limite en a.