*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants. Barème indicatif : exercice 1 sur 30 points, exercice 2 sur 20 points, exercice 3 sur 20 points.*
*Je vous rappelle quelques règles à respecter pour améliorer votre rédaction concernant les suites et les fonctions (suite à la correction du dernier DM) :*
— *ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le nombre $u_n$ (ne pas écrire que $u_n$ converge),*
— *ne pas confondre la fonction $f$ et le nombre $f(x)$ (ne pas écrire que $f(x)$ est continue),*
— *lorsque l'on écrit $f'(x) = \ldots$ préciser à quel ensemble $x$ appartient,*
— *ne pas dériver une fonction sans avoir montré qu'elle est dérivable au préalable,*
— *...*

# Exercice 1 : Suites récurrentes

1. **Récurrence linéaire du premier ordre**
   On considère la fonction $g$ définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Soit $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de $g$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit $\Delta$ la droite d'équation $y = x$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de son premier terme $v_0 = 0$ et, pour tout $n$ entier naturel, par la relation $v_{n+1} = g(v_n)$.
   (a) Montrer que la suite $v$ est bien définie.
   (b) Etudier les variations de la fonction $g$. En annexe figurent le tracé de $\mathcal{C}_2$ et celui de $\Delta$ dans le même repère.
   (c) Sur l'annexe, représenter en rouge les six premiers termes de la suite.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq 1$.
   (e) Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa limite ? On notera $a$ ce nombre.
   (f) Première méthode
      i. Montrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
      ii. Montrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite $L$.
      iii. Montrer que la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite $L'$.
      iv. Montrer que $L = L'$ et conclure. On commencera par montrer que $L' = \dfrac{1}{1+L}$ et que $L = \dfrac{1}{1+L'}$.
   (g) Deuxième méthode
      i. Montrer que $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ est stable par $g$.
      ii. Montrer que $\forall x, y \in I,\ |g(x) - g(y)| \leq \dfrac{4}{9}|x-y|$.
      iii. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - a| \leq \dfrac{4}{9}|v_n - a|$.
      iv. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - a| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
      v. Conclure.
2. **Récurrence linéaire du premier ordre avec second membre** On se propose de déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation :
$$u_{n+1} = 2u_n + 3n + 2.$$
   (a) Donner sans explication toutes les suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation $v_{n+1} = 2v_n$.
   (b) Déterminer les réels $c$ et $d$ tels que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = c + dn$ satisfasse à la relation $w_{n+1} = 2w_n + 3n + 2$.
   (c) Conclure.
   (d) Déterminer en fonction de $n$ le terme général de la suite qui vérifie la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3n + 2$ et qui est telle que $u_0 = 2$.

# Exercice 2 : Structures algébriques

Les deux parties sont indépendantes.

## Partie A : Plus petit sous-groupe contenant deux sous-groupes

Soit $(G,*)$ un groupe abélien et $(H,*)$ et $(K,*)$ deux sous-groupes de $(G,*)$. On définit l'ensemble $HK = \{h*k \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$.

1.a Montrer que $(HK,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

1.b Montrer que $(HK,*)$ est le plus petit sous-groupe de $(G,*)$ contenant $H$ et $K$. Pour cela on montrera que $HK$ contient $H$ et $K$ et que si $(L,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ qui contient $H$ et $K$ alors il contient nécessairement $HK$.

## Partie B : Structure de $Z[\sqrt{n}]$

Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier naturel fixé qui n'est pas le carré d'un entier et on admet alors que $\sqrt{n}$ est irrationnel.
On note $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{x + y\sqrt{n},\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Si $z_1$ et $z_2$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, on dit que $z_1$ divise $z_2$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ s'il existe $z_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tel que $z_2 = z_1 z_3$.

2. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{n}], +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
3. Si $z = x + y\sqrt{n}$ et $z' = x' + y'\sqrt{n}$ sont des éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, montrer que
   3.a $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
   3.b $z = z' \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$
4. Dans toute la suite, pour tout élément $z = x + y\sqrt{n}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, on appelle conjugué de $z$ et on note $\bar{z}$ le nombre $\bar{z} = x - y\sqrt{n}$.
   Montrer que $f\ :\ z \to \bar{z}$ est un automorphsime d'anneau.
5. Dans toute la suite, pour tout élément $z = x + y\sqrt{n}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, on pose $\psi(z) = z\bar{z}$. Montrer que pour tout $(z,z') \in \left(\mathbb{Z}[\sqrt{n}]\right)^2$,
   5.a $\psi(z.z') = \psi(z).\psi(z')$
   5.b $\psi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$
   5.c $|\psi(z)| = 1 \Leftrightarrow z$ est inversible pour la loi $\times$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
   5.d Si $z$ divise $z'$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, alors $\psi(z)$ divise $\psi(z')$ dans $\mathbb{Z}$.

# Exercice 3 : Limites et continuité

Les questions sont indépendantes.

1. Questions d'application directe du cours
   (a) Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction $g$ définie pour $x \neq 0$ par $g(x) = \sin(x \left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor)$ ?
   (b) Etudier la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
   (c) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
      i. Montrer que $f$ est continue en 0.
      ii. Montrer que $f$ est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
      iii. $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ ? sur $\mathbb{R}$ ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   (a) Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$.
   (c) Etablir que pour tout $r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.
   (d) Conclure en utilisant un argument de densité que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

ANNEXE CONCERNANT L'EXERCICE 1

NOM :

PRENOM :